



OTTO VON GUERICKE  
UNIVERSITÄT  
MAGDEBURG

MATH

FAKULTÄT FÜR  
MATHEMATIK

Institut für Mathematische Optimierung

Diplomarbeit

# Erweiterte Formulierungen für das Alternader

vorgelegt von

Stefan Weltge (180805)

am

17. August 2012

*Erstgutachter:*  
Prof. Dr. Volker Kaibel

*Zweitgutachter:*  
Prof. Dr. Sebastian Sager

## **Selbstständigkeitserklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und erlaubten Hilfsmittel benutzt habe. Weiter erkläre ich, die Diplomarbeit in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt zu haben.

Magdeburg, den 17. August 2012

Stefan Weltge

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
1.1	Notationen . . . . .	4
1.2	Polyeder . . . . .	5
1.3	Lineare Optimierung . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Erweiterte Formulierungen</b>	<b>9</b>
2.1	Einführung wichtiger Begriffe . . . . .	9
2.2	Erweiterungskomplexität . . . . .	10
2.2.1	Nichtnegativer Rang der Slackmatrix . . . . .	11
2.3	Untere Schranken an die Erweiterungskomplexität . . . . .	11
2.3.1	Seitenanzahl . . . . .	12
2.3.2	Rechtecküberdeckungszahl . . . . .	12
2.3.3	Rechteckgraph . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Permutaeder</b>	<b>16</b>
3.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	16
3.2	Erweiterte Formulierungen für das Permutaeder . . . . .	19
3.2.1	Birkhoff-Polytop . . . . .	20
3.2.2	Würfel-Erweiterung . . . . .	20
3.2.3	Sortiernetzwerk-Erweiterung . . . . .	23
3.3	Qualität der unteren Schranken an die Erweiterungskomplexität . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Antistabile 0/1-Polytope</b>	<b>26</b>
4.1	Erste Eigenschaften . . . . .	26
4.2	Parity-Polytop . . . . .	28
4.3	Aussagen zur Erweiterungskomplexität . . . . .	29
4.4	Weitere Beispiele . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Alternaeder</b>	<b>37</b>
5.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	37
5.2	Erweiterte Formulierungen für das Alternaeder . . . . .	39
5.2.1	Alternierendes Birkhoff-Polytop . . . . .	39
5.2.2	Würfel-Erweiterung . . . . .	40
5.2.3	Sortiernetzwerk-Erweiterung . . . . .	43
5.3	Qualität der unteren Schranken an die Erweiterungskomplexität . . . . .	47
5.4	Weitere Subpolytope des Permutaeders . . . . .	48
5.5	Stabilitätszahl des Alternaeders . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Ausblick</b>	<b>51</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>53</b>

# 1 Einleitung

Das Permutaeder ist ein bekanntes Beispiel für ein Polytop, das über exponentiell viele Facetten verfügt, sich aber als affine Projektion von verschiedenen höherdimensionalen Polytopen schreiben lässt, für deren Beschreibung man nur polynomiell viele Ungleichungen benötigt. Zudem sind solche Erweiterungen bekannt, deren Facettenanzahl bis auf einen konstanten Faktor bestmöglich und deren asymptotische Optimalität sehr einfach einzusehen ist. In dieser Diplomarbeit soll untersucht werden, inwiefern sich diese Situation auf das Alternaeder, ein interessantes Subpolytop des Permutaeders, übertragen lässt.

Zunächst motivieren wir die Theorie der erweiterten Formulierungen als relativ junges Forschungsgebiet der mathematischen Optimierung und geben einen Überblick über wichtige Resultate. Dabei stellen wir kombinatorische, untere Schranken an die Komplexität dieser Erweiterungen dar und versuchen innerhalb der Arbeit, deren Güte anhand der untersuchten Objekte einzuschätzen. Anschließend stellen wir das Permutaeder vor und gehen auf dessen Eigenschaften sowie bekannte erweiterte Formulierungen ein. In Folge dessen führen wir den Begriff der antistabilen 0/1-Polytope ein, die später als Hilfsobjekte dienen sollen, um lineare Beschreibungen für gewisse Subpolytope des Permutaeders zu konstruieren. Schließlich studieren wir das Alternaeder als wichtigen Vertreter dieser Klasse. Geeignete Anpassungen der bestehenden Erweiterungen des Permutaeders ermöglichen es uns, erweiterte Formulierungen für das Alternaeder zu gewinnen, deren Größe ebenfalls polynomiell oder sogar asymptotisch bestmöglich ist. Dabei bedienen wir uns einer kompakten Formulierung für das Parity-Polytop, das sich in die Menge der antistabilen 0/1-Polytope einordnet.

## 1.1 Notationen

Mit  $\mathbb{N}$  sei die Menge der positiven ganzen Zahlen bezeichnet. Für eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  setzen wir  $[n] = \{1, \dots, n\}$ . Ist  $M$  eine Menge, so sei  $\binom{M}{2}$  die Menge aller zweielementigen Teilmengen von  $M$ . Mit  $\log$  bezeichnen wir in dieser Arbeit den Logarithmus zur Basis 2. Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{S}_n$  die *symmetrische Gruppe*, deren Elemente die Bijektionen (*Permutationen*) der Menge  $[n]$  sind. Eine *Transposition* ist dabei eine Bijektion, die genau zwei verschiedene Zahlen  $i, j \in [n]$  vertauscht. Solche Permutationen werden wir kurz als  $(i, j)$  schreiben.

Für  $a, b \in \mathbb{R}^n$  schreiben wir deren euklidisches Skalarprodukt kurz als  $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ . Für eine Menge  $S \subseteq M$  und einen Vektor  $x \in \mathbb{R}^M$  sei  $x(S) = \sum_{s \in S} x_s$ . Wie hier schon angedeutet, werden wir Zeilen und Spalten von Vektoren bzw. Matrizen in dieser Arbeit oft mit Elementen einer Menge indizieren. Mit  $\mathbb{0}_n \in \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir den Vektor, der nur Nullen als Einträge enthält und mit  $e^{(i)}$  den  $i$ -ten Einheitsvektor, dessen Länge aus dem Kontext ersichtlich sein wird.

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge  $V$  und Kantenmenge  $E \subseteq \binom{V}{2}$ . Für  $U \subseteq V$  und  $F \subseteq E$  seien  $E(U)$  die Menge aller Kanten, die ausschließlich zu Knoten aus  $U$  inzidenten sind und  $V(F)$  die Menge aller zu Kanten aus  $F$  inzidenten Knoten. In diesem Zusammenhang setzen wir  $G(U) = G(U, E(U))$  und bezeichnen  $G(U)$

als *induzierten Subgraph* von  $G$ . Zudem sei  $\delta(U) = \{\{v, w\} \in E \mid v \in U, w \notin U\}$ . Für  $v \in V$  schreiben wir auch oft  $\delta(v) = \delta(\{v\})$ . Als Kardinalität eines Graphen bezeichnen wir die Kardinalität seiner Knotenmenge, schreiben daher  $|G| = |V|$ . Eine Menge  $U \subseteq V$  eines Graphen  $G = (V, E)$  heißt *stabil*, wenn keine zwei Knoten aus  $U$  in  $G$  adjazent sind. Umgekehrt ist  $U$  eine *Clique*, wenn je zwei Knoten aus  $U$  zueinander adjazent sind. Die Kardinalität einer größten stabilen Menge von  $G$  sei als *Stabilitätszahl* von  $G$  oder kurz  $\alpha(G)$  bezeichnet, die Kardinalität einer größten Clique als *Cliquenzahl* von  $G$  bzw.  $\omega(G)$ . Des Weiteren bezeichnen wir  $U$  als *antistabil*, wenn  $V \setminus U$  eine stabile Menge in  $G$  ist. Eine *Färbung* der Größe  $k \in \mathbb{N}$  eines Graphen ist eine Abbildung  $f: V \rightarrow [k]$  mit der Eigenschaft, dass  $f(u) \neq f(v)$  gilt, falls  $\{u, v\} \in E$ . Die kleinste Größe einer Färbung eines Graphen  $G$  wird seine *Färbungszahl* genannt und mit  $\chi(G)$  bezeichnet.

Für gerichtete Graphen  $D = (V, A)$  mit Knotenmenge  $V$  und Bögenmenge  $A \subseteq V \times V$  gelten für  $U \subseteq V$  die Bezeichnungen  $\delta^{\text{in}}(U) = \{(v, u) \in A \mid u \in U, v \notin U\}$  und analog  $\delta^{\text{out}}(U) = \{(u, v) \in A \mid u \in U, v \notin U\}$ . Wieder schreiben wir für  $v \in V$  oft  $\delta^{\text{in}}(v) = \delta^{\text{in}}(\{v\})$  und  $\delta^{\text{out}}(v) = \delta^{\text{out}}(\{v\})$ .

## 1.2 Polyeder

Im Folgenden werden grundlegende Begriffe und Fakten der Theorie der konvexen Polyeder betrachtet, die wir in dieser Arbeit benötigen. Herleitungen der wichtigsten Resultate, eingebettet in Fragestellungen der Optimierung, finden sich beispielsweise in [17].

Ein *Polyeder* ist der Schnitt endlich vieler Halbräume

$$H^{\leq}(a, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \leq \beta\},$$

wobei  $a \in \mathbb{R}^n$  und  $\beta \in \mathbb{R}$ . Damit lässt es sich als Lösungsmenge

$$P^{\leq}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

eines Ungleichungssystems  $Ax \leq b$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^m$  schreiben. Ist ein Polyeder beschränkt, so bezeichnet man es als *Polytop*. Eine sehr ausführliche, geometrische Behandlung dieser wichtigen Spezialklasse der Polyeder findet sich in [22]. Eine lineare Ungleichung  $\langle a, x \rangle \leq \beta$  heißt *gültig* für ein Polyeder  $P$ , falls sie von allen Punkten  $x \in P$  erfüllt wird. Ist  $\langle a, x \rangle \leq \beta$  eine gültige Ungleichung für  $P$ , so nennt man

$$F = \{x \in P \mid \langle a, x \rangle = \beta\}$$

eine *Seite* von  $P$ . Man sagt auch, dass die Seite  $F$  von obiger Ungleichung *induziert* wird. Seiten von Polyedern sind ebenfalls Polyeder. Man beachte, dass sowohl  $\emptyset$  als auch  $P$  selbst Seiten von  $P$  sind. Sie werden auch als die *trivialen* Seiten bezeichnet. Die *Dimension*  $\dim(P)$  eines Polyeders  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ist die Dimension des kleinsten affinen Unterraums des  $\mathbb{R}^n$ , der  $P$  enthält. Ist  $\dim(P) = n$ , so nennt man  $P$  *volldimensional*. Die Menge der Seiten eines Polyeders bildet zusammen mit der mengentheoretischen Inklusion einen Verband, den *Seitenverband* von  $P$ . Die Seiten der Dimension 0 werden als *Ecken*, die Seiten der Dimension  $\dim(P) - 1$  als *Facetten* bezeichnet. Sie entsprechen gerade den nichttrivialen inklusionsminimalen bzw. -maximalen Seiten von  $P$ . Oft fasst man die Ecken  $\{v\} \subseteq \mathbb{R}^n$  eines Polyeders eher als Vektoren  $v \in \mathbb{R}^n$  anstatt als Mengen auf.

Als *Graph*  $G(P)$  eines Polytops  $P$  bezeichnet man denjenigen ungerichteten Graphen, dessen Knotenmenge die Menge der Ecken des Polytops ist, wobei zwei verschiedene Ecken genau dann adjazent sind, wenn sie in einer eindimensionalen Seite enthalten sind.

Oft lässt man in den Systemen, die Polyeder beschreiben, auch lineare Gleichungen zu. Schließlich gilt  $\langle a, x \rangle = \beta$  genau dann, wenn  $x \in H^{\leq}(a, \beta) \cap H^{\leq}(-a, -\beta) =: H^=(a, \beta)$ . Eine Darstellung eines Polyeders durch Gleichungen und Ungleichungen heißt *irredundant*, wenn keine Gleichung oder Ungleichung weggelassen werden kann, ohne dass sich das Polyeder vergrößert. Solche Darstellungen lassen sich einfach charakterisieren: Für jede Facette des Polyeders existiert genau eine Ungleichung, die sie induziert, und umgekehrt. Zudem bildet das Gleichungssystem gerade eine minimale Beschreibung der affinen Hülle des Polyeders.

Neben der *äußeren Darstellung* als Lösungsmenge eines (Un-)gleichungssystems, lassen sich Polyeder auch immer durch eine *innere Darstellung* beschreiben:

**Satz** (Minkowski, Weyl). *Für jedes Polyeder  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  existieren endliche Mengen  $\{v^{(1)}, \dots, v^{(k)}\}, \{r^{(1)}, \dots, r^{(l)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ , so dass*

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v^{(i)} + \sum_{j=1}^l \mu_j r^{(j)} \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \forall i \in [k], \mu_j \geq 0 \forall j \in [l] \right\}.$$

Konkretisiert man diese Aussage für Polytope, so benötigt man die Menge der  $r^{(j)}$ , die für die Unbeschränktheit eines Polyeders verantwortlich ist, nicht. Schließlich erhält man folgende Aussage:

**Folgerung.** *Ein Polyeder ist genau dann beschränkt, wenn es sich als konvexe Hülle von endlich vielen Punkten schreiben lässt.*

Noch präziser ist ein Polytop gerade die konvexe Hülle seiner Ecken. Zudem benötigt man auch für jede innere Darstellung eines Polytops all seine Ecken. Ist  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polytop mit Eckenmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $U \subseteq V$  eine Teilmenge der Ecken, so nennt man  $Q = \text{conv}(U)$  ein *Subpolytop* von  $P$ .

Der folgende Abschnitt soll andeuten, warum man für die Beantwortung von Problemstellungen der (linearen) Optimierung an möglichst kompakten äußeren bzw. inneren Beschreibungen von Polyedern interessiert ist.

## 1.3 Lineare Optimierung

Eine wichtige Klasse der mathematischen Optimierungsprobleme ist die der *linearen Programme*. Diese Probleme sind von der Form

$$\max / \min \{ \langle c, x \rangle \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n \},$$

wobei  $c \in \mathbb{R}^n$  einen Zielfunktionsvektor darstellt und  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  ein Polyeder als zulässigen Bereich der Lösungen beschreiben. Für die Klasse der linearen Programme existieren sowohl theoretisch<sup>1</sup> als auch praktisch effiziente Algorithmen, die zur Lösung dieser eingesetzt werden.

<sup>1</sup>Polynomiell beschränkte Laufzeit in Kodierungslängen von  $A$ ,  $b$  und  $c$

Viele Aufgabenstellungen der kombinatorischen Optimierung lassen sich als Optimierungsprobleme von linearen Zielfunktionen über einer Menge  $X \subseteq M$  formulieren, wobei  $M$  eine endliche Grundmenge darstellt. Dabei identifiziert man zulässige Lösungen mit gewissen *charakteristischen Vektoren*  $x \in \{0, 1\}^M$ , für die  $i \in X \iff x_i = 1$  gilt. Eine wichtige Beobachtung ist nun, dass  $\max \{\langle c, x \rangle \mid x \in X\} = \max \{\langle c, x \rangle \mid x \in \text{conv } X\}$  für alle  $c \in \mathbb{R}^n$  gilt. Da die Anzahl der zulässigen Lösungen in den meisten Fällen zu groß ist, um das Problem per vollständiger Enumeration zu lösen, ist die Eckenzahl des Polytops  $\text{conv } X$  oft ähnlich groß. Aber auch die Anzahl der Facetten der Polytope wächst in der Regel exponentiell in der Eingabelänge der Instanzen.

### Beispiel (Matching-Polytop)

Ein *Matching* eines ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ist eine Kantenteilmenge  $F \subseteq E$ , für die jeder Knoten aus  $V$  mit höchstens einer Kante aus  $F$  inzident ist. Der charakteristische Vektor  $\chi(F) \in \{0, 1\}^E$  eines solchen Matchings ist nun definiert als

$$\chi(F)_e = \begin{cases} 1, & \text{falls } e \in F \\ 0, & \text{falls } e \notin F. \end{cases}$$

Die konvexe Hülle all dieser Vektoren

$$P_{\text{match}} = \text{conv}\{\chi(F) \mid F \subseteq E, F \text{ Matching}\}$$

bezeichnet man als das *Matching-Polytop* eines ungerichteten Graphen  $G$ . Man stellt leicht fest, dass die folgenden Ungleichungen gültig für alle charakteristischen Vektoren von Matchings und damit auch für  $P_{\text{match}}$  sind:

$$x(\delta(v)) \leq 1 \quad \forall v \in V \quad (1.1)$$

$$x(E(U)) \leq \frac{|U| - 1}{2} \quad \forall U \subseteq V, |U| \text{ ungerade}, |U| \geq 3 \quad (1.2)$$

$$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \quad (1.3)$$

In [10] zeigt Edmonds, dass man auch keine weiteren Ungleichungen benötigt, um  $P_{\text{match}}$  zu beschreiben. Wählt man für  $G$  den vollständigen Graphen auf  $n$  Knoten, so stellt man weiterhin fest, dass diese Beschreibung irredundant ist. Wählt man nämlich für eine ungerade Teilmenge  $U' \subseteq V$  mit  $|U'| \geq 3$  den Punkt  $x' \in \mathbb{R}^E$  mit

$$x'_e = \begin{cases} \frac{1}{|U'|-1}, & \text{falls } e \in E(U') \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

so erfüllt  $x'$  alle Ungleichungen in (1.1), (1.2) und (1.3) bis auf

$$x(E(U')) = \frac{|U'|(|U'|-1)}{2} \cdot \frac{1}{|U'|-1} = \frac{|U'|}{2} > \frac{|U'|-1}{2}.$$

Demnach sind für die Beschreibung des Matching-Polytops des vollständigen Graphen auf  $n$  Knoten exponentiell (in  $n$ ) viele Ungleichungen nötig.

In einem zentralen Resultat von Grötschel, Lovász und Schrijver ([13]) wird die Äquivalenz der Lösung linearer Programme und der des zugehörigen Separationsproblems im Sinne der Lösbarkeit in Polynomialzeit aufgezeigt. Bei Zweitem geht es darum, für einen gegebenen Punkt zu entscheiden, ob er im Polyeder liegt und, wenn nicht, eine Ungleichung zu liefern, die ihn vom eigentlichen Polyeder abtrennt. Diese Tatsache ermöglicht es, in konkreten Fällen lineare Programme zu lösen, ohne eine vollständige äußere Beschreibung des zugrundeliegenden Polyeders zur Laufzeit generieren zu müssen. In der Regel hängt die Laufzeit der bekannten Algorithmen zum Lösen von allgemeinen linearen Programmen jedoch stark von der Anzahl der Ungleichungen und Variablen ab, durch die das zugehörige Polyeder beschrieben wird.

Ein Ansatz, um die exponentielle Größe der inneren bzw. äußeren Beschreibung vieler Polyeder wieder auszugleichen, besteht in der Hinzunahme von zusätzlichen Ganzzahligkeitsbedingungen an eine Teilmenge der Variablen. Diese *gemischt-ganzzahligen Programme* haben die Form

$$\max / \min \{ \langle c, x \rangle \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{Z} \text{ für } i \in I \},$$

wobei  $I \subseteq [n]$ .

### Beispiel (Ganzzahlige Optimierung über dem Matching-Polytop)

Hat man für alle Kanten  $e \in E$  Gewichte  $c_e \in \mathbb{R}$  gegeben und sucht das Gewicht eines gewichtsmaximalen Matchings in einem Graphen, so kann man dies zunächst als lineares Programm

$$\max \{ \langle c, x \rangle \mid x \in P_{\text{match}} \} = \max \{ \langle c, x \rangle \mid x \text{ erfüllt (1.1), (1.2) und (1.3)} \}$$

formulieren. Um für einen ganzzahligen 0/1-Vektor sicherzustellen, dass er charakteristischer Vektor eines Matchings ist, genügen offenbar die Ungleichungen (1.1) und (1.3). Damit lässt sich durch Hinzunahme der Bedingung  $x \in \mathbb{Z}^E$  das Problem als ganzzahliges Programm mit linear vielen Ungleichungen kompakter formulieren:

$$\max \{ \langle c, x \rangle \mid x \text{ erfüllt (1.1) und (1.3), } x \in \mathbb{Z}^E \}$$

Da sich viele Aufgabenstellungen der Praxis als auch oben angedeutete Probleme der kombinatorischen Optimierung in kompakter Weise als gemischt-ganzzahlige Programme formulieren lassen, ist man auch in diesem Teilgebiet der mathematischen Optimierung an der algorithmischen Lösbarkeit von Probleminstanzen dieser Klassen interessiert. Jedoch sei bemerkt, dass das Lösen solcher Probleme im Allgemeinen NP-schwer ist. Eine Zusammenfassung der wichtigsten theoretischen Resultate findet sich in [17] oder [2]. Zudem wird in [4] ein Überblick über die praktischen Fortschritte der letzten Jahre im Bereich der Entwicklung sogenannter MIP-Löser<sup>2</sup> gegeben.

Neben dem Ansatz der Hinzunahme von Ganzzahligkeitsbedingungen lässt sich in vielen Fällen die Komplexität der äußeren Beschreibung eines Polyeders jedoch auch durch das Hinzufügen weiterer Hilfsvariablen ausgleichen. Dieser Ansatz soll im folgenden Kapitel beschrieben werden.

<sup>2</sup>Software zum Lösen allgemeiner gemischt-ganzzahliger Programme



## 2 Erweiterte Formulierungen

Auf der Suche nach kompakten Beschreibungen von Polytopen kann man versuchen, sie als affine Projektionen höherdimensionaler Polyeder aufzufassen. In der Praxis bedeutet dies die Hinzunahme weiterer Variablen, die sich in erster Linie negativ auf Laufzeit von Algorithmen zur Lösung linearer Programme auswirken sollte. Unter Umständen können die höherdimensionalen Polyeder aber weniger Facetten enthalten als ihre Bilder. In Abbildung 2.1 ist ein solcher Fall an einem einfachen Beispiel illustriert.

Für ein Polyeder  $Q$ , dessen affine Projektion  $P$  ergibt, werden wir sehen, dass sich lineare Programme über  $P$  in äquivalente lineare Programme über  $Q$  überführen lassen. Bewirkt nun die Zunahme weniger Variablen eine deutliche Reduzierung der Facettenanzahl, so kann man auf zeitliche Gewinne bei der Lösung der linearen Programme hoffen. Obwohl wir in dieser Arbeit nicht weiter darauf eingehen wollen, haben sich erweiterte Formulierungen in der Praxis tatsächlich als äußerst nützlich erwiesen, vgl. [20].

### 2.1 Einführung wichtiger Begriffe

Eine *Erweiterung* eines Polytops  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ist ein Polyeder  $Q \subseteq \mathbb{R}^m$  zusammen mit einer affinen Abbildung  $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , für die  $p(Q) = P$  gilt. Eine äußere Beschreibung des Polyeders  $Q$  durch Gleichungen und Ungleichungen zusammen mit der Projektion  $p$  nennt man dann eine *erweiterte Formulierung* für  $P$ . [14] bietet einen Überblick über die Theorie der erweiterten Formulierungen und stellt deren wichtige Rolle in der kombinatorischen Optimierung dar. Eine einfache, aber entscheidende Beobachtung ist die folgende: Ist  $p(y) = Ay + b$  für alle  $y \in \mathbb{R}^m$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , so gilt für alle  $c \in \mathbb{R}^n$ :

$$\max \{ \langle c, x \rangle \mid x \in P \} = \max \{ \langle c, p(y) \rangle \mid y \in Q \} = \max \{ \langle c^*, y \rangle \mid y \in Q \} + b^*,$$

wobei  $c^* = A^T c \in \mathbb{R}^m$  und  $b^* = \langle c, b \rangle \in \mathbb{R}$ . Damit kann jedes lineare Programm über  $P$  gelöst werden, indem man ein lineares Programm über  $Q$  mit entsprechend angepasster Zielfunktion betrachtet.

Als *Größe* einer erweiterten Formulierung bezeichnet man die Anzahl der Ungleichungen in der Beschreibung von  $Q$ . Man beachte, dass diese Definition weder die Anzahl der Variablen noch die Anzahl der Gleichungen in der Beschreibung von  $Q$  berücksichtigt.

Dies lässt sich folgendermaßen motivieren: Enthält  $Q \subseteq \mathbb{R}^m$  einen echten affinen Unterraum  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ , so ist das Bild von  $Q \cap U^\perp$  weiterhin  $P$ , da  $P$  beschränkt ist. Ist  $\dim(Q) < m$ , so ist  $Q$  in einem echten affinen Unterraum des  $\mathbb{R}^m$  enthalten. In diesem Fall lässt es sich auf ein volldimensionales Polyeder  $Q' \subseteq \mathbb{R}^{\dim Q}$  mit gleicher Facettenanzahl projizieren, das sich ebenfalls auf  $P$  projizieren lässt. Damit kann man immer annehmen, dass  $Q$  ein volldimensionales Polytop ist, das keinen echten affinen Unterraum enthält. Wird  $Q$  jedoch durch mehr Variablen als Facetten oder durch Gleichungen beschrieben, ist eine der beiden Annahmen nicht erfüllt.

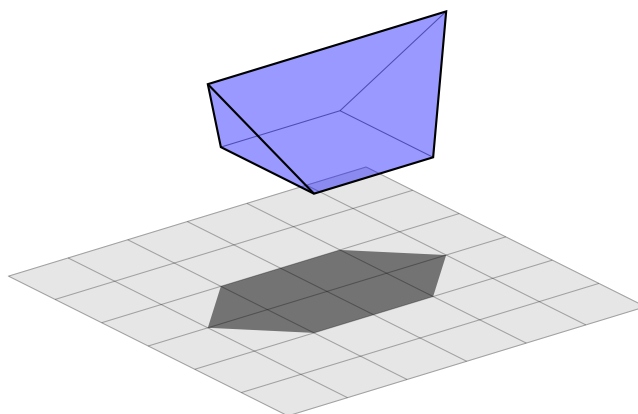


Abbildung 2.1: Während das dreidimensionale Polytop (blau) nur fünf Facetten hat, benötigt man für die äußere Darstellung seiner zweidimensionalen Projektion (grauer Schatten) sechs Ungleichungen.

### Beispiel (Simplex-Erweiterung)

Der Standardsimplex  $\Delta = \text{conv}\{e^{(i)} \mid i \in [k]\}$  des  $\mathbb{R}^k$  lässt sich via

$$\Delta = \left\{ y \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^k y_i = 1, y_j \geq 0 \forall j \in [k] \right\},$$

also mit  $k$  Ungleichungen beschreiben. Sei nun  $P = \text{conv}\{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polytop. Dann gilt offenbar

$$\begin{aligned} P &= \left\{ \sum_{i=1}^k y_i x^{(i)} \mid \sum_{i=1}^k y_i = 1, y_j \geq 0 \forall j \in [k] \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^k y_i x^{(i)} \mid y \in \Delta \right\} = \{Ay \mid y \in \Delta\}, \end{aligned}$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$  die Matrix ist, die die Vektoren  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  als Spalten hat. Also ist  $P$  das Bild von  $\Delta$  unter der Abbildung  $y \mapsto Ay$ . Damit liefert die Simplex-Erweiterung für jedes Polytop mit  $k$  Ecken eine erweiterte Formulierung der Größe  $k$ .

Da die Anzahl der Ecken eines Polytops im Allgemeinen sehr groß sein kann, liefert die Simplex-Erweiterung in vielen Fällen auch keine wesentlich kleinere Formulierung als die äußere Beschreibung des Polytops im Originalraum.

## 2.2 Erweiterungskomplexität

Für ein Polytop  $P$  kann man sich nun fragen, welche Größe eine kleinstmögliche erweiterte Formulierung für  $P$  hat. Diesen Wert bezeichnet man als *Erweiterungskomplexität*

von  $P$  oder kurz  $xc(P)$ . Damit ist sie die kleinste Zahl  $k$ , für die ein Polyeder mit  $k$  Facetten existiert, das sich affin auf  $P$  projizieren lässt. Eine erweiterte Formulierung für  $P$  heißt *optimal*, wenn deren Größe gerade  $xc(P)$  ist. Beispielsweise ist die Erweiterungskomplexität des Einheitswürfels im  $\mathbb{R}^n$  tatsächlich  $2n$ , vgl. [11]. Damit ist seine äußere Beschreibung im Originalraum bereits optimal.

Dennoch sind viele Fragen hinsichtlich der Erweiterungskomplexität von zahlreichen Klassen von Polytopen offen. Bis heute ist unbekannt, ob es eine erweiterte Formulierung für das Matching-Polytop des vollständigen Graphen auf  $n$  Knoten gibt, deren Größe polynomiell in  $n$  ist, vgl. [14].

### 2.2.1 Nichtnegativer Rang der Slackmatrix

Bei der Untersuchung der Grenzen des Konzepts der erweiterten Formulierungen stieß Yannakakis 1991 [21] auf eine Möglichkeit, den Begriff der Erweiterungskomplexität algebraisch auszudrücken. Sei  $P = \text{conv } X \subseteq \mathbb{R}^n$  für eine endliche Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polytop mit affiner Hülle  $\text{aff } P$ . Sei zudem  $P$  beschrieben durch  $P = \{x \in \text{aff } P \mid Ax \leq b\}$  für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist die *Slackmatrix* von  $P$  bezüglich  $X$ ,  $A$  und  $b$  definiert als die Matrix  $\Phi \in \mathbb{R}_+^{[m] \times X}$  mit  $\Phi_{i,x} = b - \langle A_{i,*}, x \rangle$  für alle  $x \in X$  und  $i \in [m]$ , wobei  $A_{i,*}$  die  $i$ -te Zeile von  $A$  ist.

Überträgt man Yannakakis' Gedanken mit [11] auf die hier angegebene Definition der Erweiterungskomplexität, so erhält man folgendes, zentrale Resultat:

**Satz 2.2.1.** *Für ein Polytop  $P = \text{conv } X = \{x \in \text{aff } P \mid Ax \leq b\}$  ist die Erweiterungskomplexität von  $P$  gleich dem nichtnegativen Rang der Slackmatrix von  $P$  (bezüglich  $X$ ,  $A$  und  $b$ ).*

Dabei ist der *nichtnegative Rang* einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  die kleinste Zahl  $f$ , für die nichtnegative Matrizen  $B \in \mathbb{R}_+^{m \times f}$  und  $C \in \mathbb{R}_+^{f \times n}$  existieren, so dass  $A = B \cdot C$ . In dieser Definition findet man den herkömmlichen Begriff des *Rangs* einer Matrix wieder, indem man auf die Nichtnegativität von  $B$  und  $C$  verzichtet. Man beachte, dass der nichtnegative Rang für alle Slackmatrizen eines Polytops  $P$  mit obiger Aussage gleich ist.

Es existieren Algorithmen zur Berechnung des nichtnegativen Rangs einer Matrix [7]. Damit ist es zumindest theoretisch möglich, die Erweiterungskomplexität eines gegebenen Polytops algorithmisch zu bestimmen. Jedoch ist bereits das Problem, für eine gegebene Matrix zu entscheiden, ob ihr nichtnegativer Rang ihrem Rang entspricht, NP-schwer [19].

## 2.3 Untere Schranken an die Erweiterungskomplexität

Die Bestimmung des exakten Wertes für die Erweiterungskomplexität kann, wie bereits angedeutet, eine schwierige Aufgabe darstellen. Zudem ist man oft nur an der *asymptotischen* Optimalität von erweiterten Formulierungen interessiert. Dabei nennt man erweiterte Formulierungen für Polytope  $P \in \mathbb{R}^n$  asymptotisch optimal, wenn sich ihre Größe nur höchstens um einen Faktor, der unabhängig von  $n$  ist, von  $xc(P)$  unterscheidet.

Um sich von der (asymptotischen) Optimalität einer erweiterten Formulierung überzeugen zu können, ist man deshalb an unteren Schranken an die Erweiterungskomplexität interessiert. Eine Reihe von Schranken an  $xc(P)$ , die sich allein aus der kombinatorischen

Struktur von  $P$  ergeben, findet sich in [11]. An dieser Stelle sollen einige von ihnen vorgestellt werden. Dabei wollen wir sie allein aus folgender Beobachtung ableiten.

**Proposition 2.3.1.** *Seien  $P \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q \in \mathbb{R}^m$  Polyeder sowie  $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  affin mit  $p(Q) = P$ . Dann ist  $F \mapsto j(F) := Q \cap p^{-1}(F)$  eine injektive Abbildung vom Seitenverband von  $P$  in den Seitenverband von  $Q$ . Zudem gilt*

$$F \subseteq H \iff j(F) \subseteq j(H)$$

für alle Seiten  $F, H$  von  $P$ .

*Beweis.* Sei  $F$  eine Seite von  $P$ , induziert durch die Ungleichung  $\langle a, x \rangle \leq \beta$ . Dann ist die lineare Ungleichung  $\langle a, p(y) \rangle \leq \beta$  gültig für  $Q$ , wobei  $\langle a, p(y) \rangle = \beta$  genau dann gilt, wenn  $p(y) \in F$ . Damit ist  $j(F)$  tatsächlich eine Seite von  $Q$ . Wegen

$$p(j(F)) = p(Q) \cap p(p^{-1}(F)) = P \cap F = F$$

ist  $j$  injektiv. Sind zudem  $F, H$  Seiten von  $P$  mit  $F \subseteq H$ , so gilt

$$j(F) = Q \cap p^{-1}(F) \subseteq Q \cap p^{-1}(H) = j(H).$$

Umgekehrt folgt aus  $j(F) \subseteq j(H)$  auch

$$F = p(j(F)) \subseteq p(j(H)) = H.$$

□

Damit ordnet sich der Seitenverband von  $P$  immer in den eines Erweiterungspolyeders  $Q$  ein. Insbesondere sehen wir, dass  $Q$  mindestens so viele Seiten wie  $P$  haben muss. Dies führt uns direkt zu folgender Schranke.

### 2.3.1 Seitenanzahl

Sei für ein Polytop  $P$  die Anzahl seiner Seiten mit  $f(P)$  und die Anzahl seiner Ecken mit  $v(P)$  bezeichnet. Seien  $P \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q \in \mathbb{R}^m$  Polyeder sowie  $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  affin mit  $p(Q) = P$ . Sind  $F_1, \dots, F_k$  die Facetten von  $Q$ , so existiert für jede Seite  $F$  von  $Q$  eine Menge  $I \subseteq [k]$ , so dass  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ . Damit ist  $f(Q) \leq 2^k$ . Mit  $f(P) \leq f(Q)$  folgt:

**Satz 2.3.2.** *Ist  $P$  ein Polytop, so gilt  $\log(f(P)) \leq \text{xc}(P)$ . Insbesondere gilt  $\log(v(P)) \leq \text{xc}(P)$ .*

Letztere Schranke wird in dieser Arbeit meist ausreichen, um die asymptotische Optimalität der hier vorgestellten erweiterten Formulierungen einzusehen.

### 2.3.2 Rechtecküberdeckungsanzahl

Um eine weitere untere Schranke an die Erweiterungskomplexität zu gewinnen, benötigen wir einige zusätzliche Begriffe. Für ein Polytop  $P$  sei  $\mathcal{F}(P)$  die Menge seiner Facetten und  $\mathcal{V}(P)$  die Menge seiner Ecken. Ein Paar  $(F, v) \in \mathcal{F}(P) \times \mathcal{V}(P)$  nennen wir *Nichtinzidenz* von  $P$ , falls  $v \notin F$ . Eine Menge der Form  $I \times J \subseteq \mathcal{N}(P)$  mit  $I \subseteq \mathcal{F}(P)$ ,  $J \subseteq \mathcal{V}(P)$

bezeichnen wir als *Rechteck* von  $P$ . Eine Menge von Rechtecken  $R_1, \dots, R_k$  heißt *Rechtecküberdeckung* der Größe  $k$  von  $P$ , falls  $\cup_{i=1}^k R_i = \mathcal{N}(P)$ .

Solch eine Rechtecküberdeckung existiert immer, schließlich ist jede Nichtinzidenz  $(F, v)$  in dem trivialen Rechteck  $\{F\} \times \{v\}$  enthalten. In der Regel kommt man natürlich mit deutlich weniger Rechtecken aus, um alle Nichtinzidenzen zu überdecken. Die kleinste Zahl  $k$ , so dass eine Rechtecküberdeckung der Größe  $k$  für  $P$  existiert, bezeichnen wir als *Rechtecküberdeckungszahl* von  $P$  oder kurz  $\text{rc}(P)$ .

**Proposition 2.3.3.** *Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polytop,  $Q \subseteq \mathbb{R}^m$  ein Polyeder und  $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  affin mit  $p(Q) = P$ . Dann existiert eine Überdeckung der Größe  $|\mathcal{F}(Q)|$ .*

*Beweis.* Seien  $G_1, \dots, G_k$  die Facetten von  $Q$ . Wir definieren die Mengen

$$R_i := \{F \in \mathcal{F}(P) \mid j(F) \subseteq G_i\} \times \{v \in \mathcal{V}(P) \mid j(\{v\}) \not\subseteq G_i\}$$

für  $i = 1, \dots, k$ . Die  $R_i$  sind Rechtecke von  $P$ , denn sind  $(F, v) \in R_i$ , so würde aus  $v \in F$  auch  $j(\{v\}) \subseteq j(F) \subseteq G_i$  folgen. Wir müssen nun noch zeigen, dass  $R_1, \dots, R_k$  eine Überdeckung von  $P$  bilden.

Seien dazu  $(F, v) \in \mathcal{N}(P)$ . Seien  $G_{i_1}, \dots, G_{i_r}$  die Facetten von  $Q$ , die  $j(F)$  enthalten. Dann ist  $j(F) = \cap_{i=1}^r G_{i_i}$ . Da  $j(\{v\}) \not\subseteq \cap_{i=1}^r G_{i_i}$ , existiert ein  $i_0 \in \{i_1, \dots, i_r\}$ , so dass  $j(\{v\}) \not\subseteq G_{i_0}$ . Damit ist  $(F, v) \in R_{i_0} \subseteq \cup_{i=1}^k R_i$ .  $\square$

Damit ist die Rechtecküberdeckungszahl von  $P$  höchstens so groß wie die Facettenanzahl einer jeden Erweiterung von  $P$ . Wir erhalten die Schranke:

**Satz 2.3.4.** *Ist  $P$  ein Polytop, so gilt  $\text{rc}(P) \leq \text{xc}(P)$ .*

Der Begriff der Rechtecküberdeckung lässt sich auch über die Definition der Slackmatrix motivieren. Dabei geht es darum, die Nichtnull-Einträge der Slackmatrix durch Mengen der Form  $I \times J$  zu überdecken, wobei  $I$  eine Teilmenge der Zeilen und  $J$  eine Teilmenge der Spalten ist. Geht man davon aus, dass die Zeilen jeweils nur zu Facetten-induzierenden Ungleichungen und die Spalten nur zu Ecken gehören, so entsprechen die Nichtnull-Einträge gerade den Elementen von  $\mathcal{N}(P)$ . Mit einer nichtnegativen Faktorisierung der Slackmatrix lässt sich nun ebenfalls eine Überdeckung konstruieren. Zudem sei bemerkt, dass immer  $\log f(P) \leq \text{rc}(P)$  gilt, vgl. [11].

### 2.3.3 Rechteckgraph

Man kann die Schranke der Rechtecküberdeckungszahl etwas abschwächen, indem man sie auf dem *Rechteckgraphen*  $\mathcal{R}(P)$  von  $P$  geeignet interpretiert. Dabei ist  $\mathcal{R}(P) = (V, E)$  ein ungerichteter Graph mit

$$\begin{aligned} V &= \mathcal{N}(P) \\ E &= \left\{ \{(F, v), (F', v')\} \in \binom{\mathcal{N}(P)}{2} \mid v \in F' \text{ oder } v' \in F \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

hat also als Knotenmenge die Nichtinzidenzen von  $P$  und verbindet sie genau dann durch eine Kante, wenn sie sich nicht gemeinsam durch ein Rechteck überdecken lassen. Hat man eine Rechtecküberdeckung  $R_1, \dots, R_k$  der Nichtinzidenzen gegeben, so liefert sie eine Färbung mit  $k$  Farben des Rechteckgraphen, indem wir einer Nichtinzidenz  $(F, v)$  die Farbe  $i$

zuordnen, wenn  $(F, v) \in R_i$ . Wird eine Nichtinzidenz von mehreren Rechtecken überdeckt, ist es egal, für welche der Farben wir uns entscheiden. Haben wir umgekehrt eine Färbung mit  $k$  Farben des Rechteckgraphen gegeben, so können wir die einzelnen Farbklassen zu Rechtecken vervollständigen und erhalten wiederum eine Rechtecküberdeckung der Größe  $k$ .

**Satz 2.3.5.** *Sei  $P$  ein Polytop. Dann gilt  $\chi(\mathcal{R}(P)) = \text{rc}(P) \leq \text{xc}(P)$ .*

Der Vorteil dieser Umformulierung ist nun, dass uns alle gültigen unteren Schranken an die Färbungszahl eines Graphen an dieser Stelle auch eine untere Schranke an  $\text{rc}(P)$  und somit auch an  $\text{xc}(P)$  liefern. Sicher ist die Cliquenzahl  $\omega(G)$  eine untere Schranke an  $\chi(G)$ .

**Satz 2.3.6.** *Sei  $P$  ein Polytop. dann gilt  $\omega(\mathcal{R}(P)) \leq \text{xc}(P)$ .*

Oft liefert die Cliquenzahl des Rechteckgraphen jedoch keine asymptotisch scharfe Schranke an die Erweiterungskomplexität, wie wir auch in dieser Arbeit in einigen Fällen noch bestätigen werden. Dies liegt mitunter an folgender Beobachtung:

**Satz 2.3.7.** *Sei  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Polytop. Dann gilt*

$$\omega(\mathcal{R}(P)) \leq \max_{v \in \mathcal{V}(P)} |\{F \in \mathcal{F}(P) \mid v \in F\}| + 1.$$

*Beweis.* Sei  $C \subseteq \mathcal{N}(P)$  eine Clique in  $\mathcal{R}(P)$ . Wir betrachten den gerichteten Graphen  $D_C = (C, A)$  mit Bögenmenge

$$A = \{((F_1, v_1), (F_2, v_2)) \in C \times C \mid v_1 \in F_2\}.$$

Sind  $(F_1, v_1), (F_2, v_2) \in C$ , so gilt  $\{(F_1, v_1), (F_2, v_2)\} \in E(\mathcal{R}(P))$ . Damit muss dann aber auch  $F_1 \neq F_2$  gelten. Also tritt jede Facette  $F \in \mathcal{F}(P)$  höchstens einmal als erste Koordinate in  $C$  auf. Wir erhalten

$$|\delta^{\text{out}}(w)| \leq \max_{v \in \mathcal{V}(P)} |\{F \in \mathcal{F}(P) \mid v \in F\}| =: \delta^{\text{max}}$$

für alle  $w \in C$ . Jede ungerichtete Kante innerhalb von  $C$  entspricht mindestens einem gerichteten Bogen in  $D_C$ . Damit folgt

$$|C|(|C| - 1) = |E(C)| \leq |A| \leq |C| \cdot \delta^{\text{max}},$$

also  $|C| \leq \delta^{\text{max}} + 1$ . □

Die Farbklassen jeder Färbung bilden stabile Mengen. Damit muss  $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)|$ , also auch  $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} =: \iota_0(G)$  gelten.

**Satz 2.3.8.** *Sei  $P$  ein Polytop. Dann gilt  $\iota_0(\mathcal{R}(P)) \leq \text{xc}(P)$ .*

In einigen Fällen ist diese Schranke jedoch ebenfalls nicht scharf genug: Oft kann man große Eckenmengen  $\mathcal{V}$  von  $P$  sowie große Facettenmengen  $\mathcal{F}$  von  $P$  finden, so dass  $(F, v) \in \mathcal{N}(P)$  für alle  $(F, v) \in \mathcal{F} \times \mathcal{V}$  gilt. Damit bildet die Menge  $\mathcal{F} \times \mathcal{V}$  ein Rechteck bzw. eine stabile Menge der Größe  $|\mathcal{F}| \cdot |\mathcal{V}|$ . In Abbildung 2.2 ist eine solche Situation illustriert. Zum Abschluss dieses Kapitels geben wir eine Verbesserung dieser Schranke an, indem

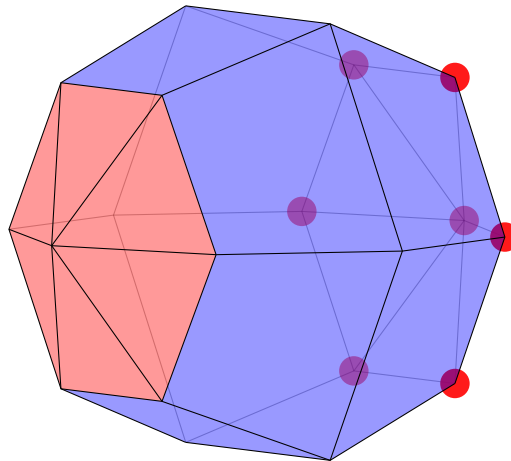


Abbildung 2.2: Keine der hervorgehobenen Ecken ist inzident zu einer der hervorgehobenen Facetten. Die Menge dieser Nichtinzidenzen bildet somit ein Rechteck der Größe  $6 \cdot 7 = 42$ .

wir folgenden Ausdruck betrachten:

$$\iota(G) := \max_{\emptyset \neq U \subseteq V(G)} \frac{|U|}{\alpha(G(U))}.$$

Die Verhältnisse der induzierten Subgraphen sind ebenfalls untere Schranken an die Färbungszahl von  $G$  und damit auch deren Maximum.

**Satz 2.3.9.** *Sei  $P$  ein Polytop. Dann gilt  $\iota(\mathcal{R}(P)) \leq xc(P)$ .*

In der Regel kann man nicht alle Verhältnisse in  $\iota(\mathcal{R}(P))$  auswerten. Deshalb stellt sich die Frage nach geeigneten Subgraphen  $(U, E(U))$  von  $\mathcal{R}(P)$ , für die das Verhältnis  $\frac{|U|}{\alpha(G(U))}$  möglichst groß ist. Eine natürliche Einschränkung von  $\mathcal{R}(P)$  kann beispielsweise die sein, in der man nur Nichtinzidenzen zulässt, deren erste Koordinate zu einer gewissen Klasse von Facetten gehört.

## 3 Permutaeder

Oft identifiziert man die Elemente der symmetrischen Gruppe mit den Permutationen des Vektors  $(1, 2, \dots, n) \in \mathbb{R}^n$ . Bildet man die konvexe Hülle all dieser Punkte, erhält man das *Permutaeder*, ein bekanntes und sehr gut verstandenes Polytop, vgl. [3]. Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass dieses Polytop über eine Reihe interessanter erweiterter Formulierungen verfügt.

### 3.1 Definition und Eigenschaften

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei das Permutaeder der Ordnung  $n$  als

$$P_{\text{perm}}^n = \text{conv} \{(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)) \mid \pi \in \mathcal{S}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

definiert. Im Folgenden werden wir für eine Permutation  $\pi \in \mathcal{S}_n$  den zugehörigen Permutationsvektor kurz mit  $v^{(\pi)} = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$  bezeichnen. Für alle Punkte  $x \in P_{\text{perm}}^n$  gilt offenbar sowohl

$$\sum_{i=1}^n x_i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (3.1)$$

als auch

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \frac{|S|(|S|+1)}{2} \quad \forall \emptyset \neq S \subset [n]. \quad (3.2)$$

Bereits 1952 zeigte Rado [15], dass die Gleichung (3.1) zusammen mit den Ungleichungen (3.2) eine irredundante, lineare Beschreibung des Permutaeders liefern. Die Ungleichungen in (3.2) sind demnach alle Facetten-induzierend und es gilt  $\dim P_{\text{perm}}^n = n - 1$ .

Die Maximierung bzw. Minimierung einer linearen Zielfunktion über dem Permutaeder stellt eine triviale Aufgabe dar:

**Proposition 3.1.1.** *Sei  $c \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $\langle c, v^{(\sigma)} \rangle = \max \{\langle c, v^{(\pi)} \rangle \mid \pi \in \mathcal{S}_n\}$  genau dann, wenn*

$$c_{\sigma^{-1}(1)} \leq c_{\sigma^{-1}(2)} \leq \dots \leq c_{\sigma^{-1}(n)}. \quad (3.3)$$

*Beweis.* Für  $n = 1$  ist obige Aussage trivial. Sei  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Angenommen, es gilt  $c_{\pi^{-1}(i)} > c_{\pi^{-1}(i+1)}$  für ein  $i \in [n-1]$ . Setzen wir  $\sigma = (i, i+1)\pi$ , so gilt

$$\begin{aligned} \langle c, v^{(\sigma)} \rangle - \langle c, v^{(\pi)} \rangle &= \langle c, v^{(\sigma)} - v^{(\pi)} \rangle \\ &= c_{\pi^{-1}(i)} \cdot (i+1) + c_{\pi^{-1}(i+1)} \cdot i - c_{\pi^{-1}(i)} \cdot i - c_{\pi^{-1}(i+1)} \cdot (i+1) \\ &= c_{\pi^{-1}(i)} - c_{\pi^{-1}(i+1)} > 0. \end{aligned}$$

Somit ist (3.3) notwendig für die Optimalität eines Permutationsvektors bezüglich  $c$ . Erfüllen umgekehrt  $\pi, \sigma \in \mathcal{S}_n$  beide die Bedingung (3.3), so gilt  $c_{\pi^{-1}(j)} = c_{\sigma^{-1}(j)}$  für alle  $j \in [n]$  und damit  $\langle c, v^{(\sigma)} \rangle = \langle c, v^{(\pi)} \rangle$ .  $\square$



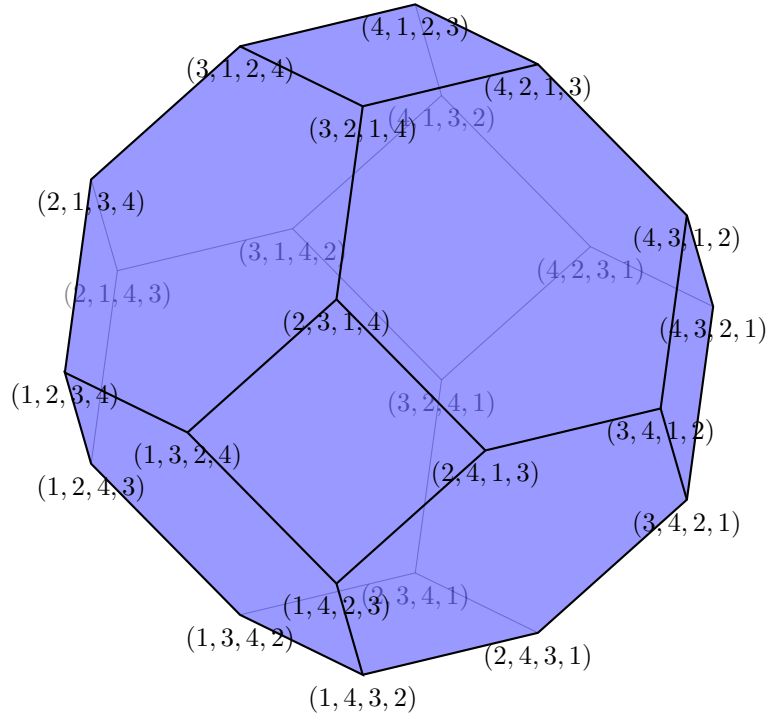


Abbildung 3.1: Bild von  $P_{\text{perm}}^4$  unter der Projektion  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2 + x_4, x_1 + x_2, x_1 + x_4)$

Insbesondere sieht man mit  $c = v^{(\pi)}$ , dass  $v^{(\pi)}$  eindeutige Optimallösung der zugehörigen Zielfunktion über  $P_{\text{perm}}^n$  ist und damit alle Permutationsvektoren auch tatsächlich Ecken des Permutaeders sind. In dieser Arbeit benötigen wir zudem einige Aussagen über deren Nachbarschaftsrelation.

**Lemma 3.1.2.** *Zwei Ecken  $v^{(\pi)}, v^{(\sigma)} \in P_{\text{perm}}^n$  sind genau dann adjazent, wenn  $\pi\sigma^{-1} \in \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\} =: \mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{S}_n$ .*

*Beweis.* Da jede Facette  $F$  des Permutaeders von einer Ungleichung (3.2) induziert wird und umgekehrt, können wir sie mit einer Menge  $\emptyset \neq S \subset [n]$  identifizieren und bezeichnen sie als  $F = F_S$ . Es gilt offenbar  $v^{(\pi)} \in F_S$  genau dann, wenn  $\{\pi(i) \mid i \in S\} = \{1, 2, \dots, |S|\}$ . Für eine Permutation  $\gamma \in \mathcal{S}_n$  und  $k \in [n-1]$  setzen wir daher

$$S_k^{(\gamma)} = \{\gamma^{-1}(1), \dots, \gamma^{-1}(k)\} \subset [n]$$

und erhalten mit  $F_{S_1^{(\gamma)}}, \dots, F_{S_{[n-1]}^{(\gamma)}}$  genau die  $v^{(\gamma)}$  enthaltenden Facetten des Permutaeders.

Nehmen wir zuerst an, dass  $\pi\sigma^{-1} \in \mathcal{T}_n$ , also etwa  $\pi = (i, i+1)\sigma$  für ein  $i \in [n-1]$ . Dann gilt  $S_j^{(\sigma)} = S_j^{(\pi)}$  für alle  $j \in [n-1] \setminus \{i\}$ . Somit sind  $v^{(\pi)}$  und  $v^{(\sigma)}$  im Schnitt von  $n-2$  paarweise verschiedenen Facetten von  $P_{\text{perm}}^n$  enthalten, einer eindimensionalen Seite des Permutaeders.

Seien umgekehrt  $v^{(\pi)}$  und  $v^{(\sigma)}$  adjazent. Damit gibt es eine eindimensionale Seite von  $P_{\text{perm}}^n$ , die beide Punkte enthält. Diese wiederum lässt sich als Schnitt von mindestens  $n-2$  Facetten des Permutaeders schreiben. Somit gibt es  $n-2$  Facetten, die sowohl  $v^{(\pi)}$

als auch  $v^{(\sigma)}$  enthalten. Also existiert ein Index  $i \in [n-1]$ , so dass  $S_j^{(\pi)} = S_j^{(\sigma)}$  für alle  $j \in [n-1] \setminus \{i\}$  gilt. Insbesondere folgt, dass  $\pi^{-1}(k) = \sigma^{-1}(k)$  für alle  $k \in [n-1] \setminus \{i, i+1\}$  gilt. Da  $\pi \neq \sigma$ , ist also  $\pi = (i, i+1)\sigma$ .  $\square$

Insbesondere ist jede Ecke in  $P_{\text{perm}}^n$  zu genau  $n-1$  Ecken adjazent. Mit obiger Charakterisierung rechnet man zudem leicht nach, dass für alle Nachbarn  $v^{(\pi)}$  einer Ecke  $v^{(\sigma)}$  des Permutaeders die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \sigma(i) \cdot v_i^{(\pi)} = \sum_{i=1}^n i^2 - 1$$

gilt. Diese Beobachtung liefert nun die folgende Intuition: Entfernen wir eine Menge von Permutationsvektoren, die paarweise nicht benachbart sind, so kann man die konvexe Hülle der verbleibenden Ecken beschreiben, indem man lediglich die zu obigen Gleichungen gehörenden Ungleichungen zur Beschreibung des Permutaeders hinzufügt. Im Allgemeinen ist es schwierig, eine explizite Darstellung solcher Subpolytope anzugeben. Dass sich unsere Situation aber in eine Klasse von Spezialfällen einordnet, in denen das möglich ist, klärt folgender Satz:

**Satz 3.1.3.** *Sei  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  die Menge der Ecken eines Polytops  $P = \text{conv } V$ , sowie  $V' = \{v^{(1)}, \dots, v^{(m)}\} \subset V$  eine Teilmenge dieser, für die gilt:*

- i) *Zu jeder Ecke  $v^{(j)} \in V'$  liegen all ihre Nachbarn auf einer Hyperebene  $H^=(a^{(j)}, \beta_j)$ .*
- ii) *Die Ungleichung  $\langle a^{(j)}, x \rangle \leq \beta_j$  ist gültig für  $\text{conv}(V \setminus \{v^{(j)}\})$  für alle  $j \in [m]$ .*
- iii) *Die Menge  $V'$  ist stabil, d. h. keine zwei Ecken aus  $V'$  sind benachbart in  $P$ .*

Dann ist

$$\text{conv}(V \setminus V') = \{x \in P \mid \langle a^{(j)}, x \rangle \leq \beta_j \ \forall j \in [m]\}.$$

*Beweis.* Setzen wir  $Q = \text{conv}(V \setminus V')$  und  $Q' = \{x \in P \mid \langle a^{(j)}, x \rangle \leq \beta_j \ \forall j \in [m]\}$ , so folgt mit ii), dass  $Q \subseteq Q'$ .

Sei nun  $x \in Q'$ . Da  $Q' \subseteq P$ , können wir  $x$  als Konvexkombination  $x = \sum_{i=1}^t \lambda_i w^{(i)}$  schreiben, wobei  $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i > 0$  und  $w^{(i)} \in V$  für  $i = 1, \dots, t$  ist. Gilt  $w^{(i)} \in V \setminus V'$  für alle  $i \in [t]$ , so ist  $x \in Q$  und wir sind fertig.

Angenommen, es gilt  $w = w^{(i^*)} \in V'$  für ein  $i^* \in [t]$ . Setzen wir  $\bar{x} = \sum_{i \neq i^*} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{i^*}} w^{(i)}$ , so können wir

$$x = (1 - \lambda_{i^*})\bar{x} + \lambda_{i^*}w$$

schreiben. Da  $w \in V'$ , existiert mit i) und ii) ein  $j \in [m]$ , so dass  $\langle a^{(j)}, w \rangle > \beta_j$ , aber  $x \in H^{\leq}(a^{(j)}, \beta_j)$  gilt.

Die Verbindungsstrecke  $\{(1 - \lambda)\bar{x} + \lambda w \mid \lambda \in [0, 1]\}$  muss somit die Hyperebene  $H^=(a^{(j)}, \beta_j)$  in einem Punkt  $x^* \in P$  schneiden, vgl. Abbildung 3.2. Nach i) ist  $x^*$  in der konvexen Hülle der Nachbarn von  $w$  in  $P$  enthalten. Diese wiederum sind nach iii) alle in  $V \setminus V'$ . Demnach ist auch  $x^* \in Q$ . Da  $x = (1 - \lambda_{i^*})\bar{x} + \lambda_{i^*}w$  und  $\langle a^{(j)}, x \rangle \leq \beta_j$ , muss  $x$  in der Verbindungsstrecke von  $\bar{x}$  und  $x^* \in Q$  enthalten sein. Letzterer lässt sich jedoch als Konvexkombination von Punkten aus  $V \setminus V'$  schreiben. Auf diese Weise können wir alle Punkte  $w^{(i)} \in V'$  aus der Darstellung von  $x$  entfernen und erhalten schließlich ebenfalls  $x \in \text{conv}(V \setminus V') = Q$ .  $\square$

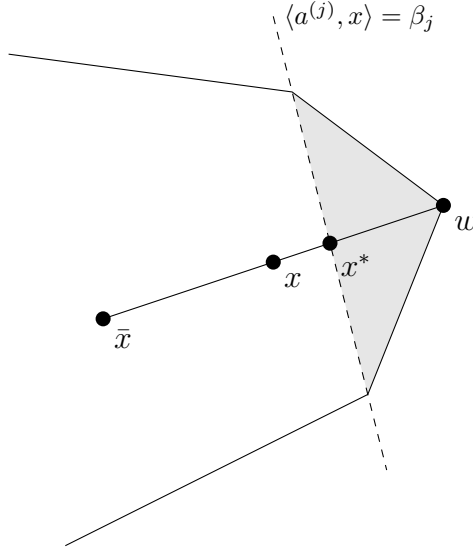


Abbildung 3.2: Die Verbindungsstrecke zwischen  $\bar{x}$  und  $w$  schneidet die Hyperebene  $H = (a^{(j)}, \beta_j)$  im Punkt  $x^*$ .

Letztendlich schlussfolgern wir die Gültigkeit der intuitiv begründeten Vermutung:

**Folgerung 3.1.4.** *Sei  $V \subseteq \mathcal{S}_n$  eine Menge von Permutationen, so dass  $\pi\sigma^{-1} \notin \mathcal{T}_n$  für alle  $\pi, \sigma \in \mathcal{T}_n$  gilt. Dann ist*

$$\text{conv} \{v^{(\pi)} \mid \pi \in \mathcal{S}_n \setminus V\} = \left\{ x \in P_{\text{perm}}^n \mid \sum_{i=1}^n \sigma(i)x_i \leq \sum_{i=1}^n i^2 - 1 \quad \forall \sigma \in V \right\}.$$

*Beweis.* Für  $\sigma \in V$  ist  $v^{(\sigma)}$  die eindeutige Optimallösung der Funktion  $x \mapsto \langle v^{(\sigma)}, x \rangle$  über  $P_{\text{perm}}^n$ . Für  $\pi \in \mathcal{S}_n$  folgt wegen  $\langle v^{(\sigma)}, v^{(\pi)} \rangle \in \mathbb{Z}$  schließlich

$$\langle v^{(\sigma)}, v^{(\pi)} \rangle \leq \langle v^{(\sigma)}, v^{(\sigma)} \rangle - 1 = \sum_{i=1}^n i^2 - 1.$$

Damit ist die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n \sigma(i)x_i \leq \sum_{i=1}^n i^2 - 1 \tag{3.4}$$

gültig für  $\text{conv} \{v^{(\pi)} \mid \pi \in \mathcal{S}_n \setminus \{\sigma\}\}$ . Wir wissen auch, dass die Ungleichung für alle Nachbarn von  $v^{(\sigma)}$  mit Gleichheit erfüllt wird. Zudem ist die Menge der Ecken in  $V$  nach Voraussetzung stabil. Satz 3.1.3 liefert nun die Behauptung.  $\square$

## 3.2 Erweiterte Formulierungen für das Permutaeder

Wir haben gesehen, dass man für die Beschreibung des Permutaeders im Originalraum die Gleichung (3.1) sowie  $2^n - 2$  Ungleichungen vom Typ (3.2) benötigt. Im Folgenden werden wir bekannte erweiterte Formulierungen für  $P_{\text{perm}}^n$  vorstellen, die weitaus weniger Ungleichungen benötigen.

### 3.2.1 Birkhoff-Polytop

Der klassische Weg, eine Permutation durch eine 0/1-Matrix zu kodieren, ist der folgende: Gegeben  $\pi \in \mathcal{S}_n$ , assoziieren wir dazu die 0/1-Matrix der Größe  $n \times n$ , die an der Stelle  $(i, j)$  genau dann über eine 1 verfügt, wenn  $\pi(j) = i$  ist. Bei diesem Vorgehen erhält man als Bilder genau die 0/1-Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau eine 1 enthalten.

Die konvexe Hülle solcher *Permutationsmatrizen* der Größe  $n \times n$  bezeichnet man als *Birkhoff-Polytop* der Ordnung  $n$  oder kurz  $P_{\text{Birk}}^n$ , in der jede der Permutationsmatrizen auch eine Ecke bildet. Die Menge dieser Punkte verfügt über eine kompakte lineare Beschreibung:

$$P_{\text{Birk}}^n = \{y \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \begin{array}{ll} y_{i,j} \geq 0 & \forall (i, j) \in [n] \times [n] \\ \sum_{i=1}^n y_{i,j} = 1 & \forall j \in [n] \\ \sum_{j=1}^n y_{i,j} = 1 & \forall i \in [n] \end{array} \}.$$

Die Nichtnegativitätsbedingungen entsprechen gerade den Facetten des Birkhoff-Polytops, vgl. [22]. Zudem besteht eine natürliche, lineare Bijektion zwischen Permutationsmatrizen der Größe  $n \times n$  und Permutationsvektoren der Länge  $n$ . Schließlich erfüllt die Abbildung

$$p: P_{\text{Birk}}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$p(y)_j = \sum_{i=1}^n i \cdot y_{i,j} \text{ für } j \in [n] \quad (3.5)$$

die angedeutete Projektion. Damit liefert das Birkhoff-Polytop eine erweiterte Formulierung der Größe  $n^2$  für das Permutaeder.

### 3.2.2 Würfel-Erweiterung

Möchte man eine Permutation  $\pi \in \mathcal{S}_n$  definieren, so kann man sie neben der direkten Auflistung aller Wertepaare auch etwas umständlicher beschreiben: Für zwei verschiedene Zahlen  $i, j \in [n]$  gilt immer entweder  $\pi(i) < \pi(j)$  oder  $\pi(i) > \pi(j)$ . Kennen wir all diese Relationen, lässt sich die Permutation eindeutig rekonstruieren. Schließlich gilt

$$\pi(j) = |\{i \in [n] \mid \pi(i) < \pi(j)\}| + 1.$$

Damit lässt sich die Permutation  $\pi$  mit der 0/1-Matrix  $y^{(\pi)}$  der Größe  $n \times n$  identifizieren, die folgendermaßen definiert ist:

$$y_{i,j}^{(\pi)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \pi(i) < \pi(j) \text{ und } i < j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diesen Beobachtungen liegt folgende erweiterte Formulierung zugrunde, die etwa in [22, Beispiel 7.15] erwähnt wird. Sei  $\Delta^n$  die konvexe Hülle aller 0/1-Matrizen, die nur oberhalb

der Hauptdiagonalen Werte verschieden von 0 enthalten. Als Seite des Einheitswürfels im  $\mathbb{R}^{n \times n}$  lässt sie sich kompakt als Lösungsmenge des Systems

$$\Delta^n = \{y \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \begin{array}{ll} y_{i,j} \geq 0 & \forall i, j \in [n], i < j \\ y_{i,j} \leq 1 & \forall i, j \in [n], i < j \\ y_{i,j} = 0 & \forall i, j \in [n], i \geq j \end{array} \}$$

beschreiben. Somit beträgt die Facettenzahl von  $\Delta^n$  gerade  $2^{\frac{n(n-1)}{2}} = n(n-1)$ . Als Projektion wählen wir die affine Funktion

$$W: \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$W(y)_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^n y_{i,j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i > j}}^n (1 - y_{j,i}) + 1 \text{ für } j \in [n], \quad (3.6)$$

die die obige Idee der Zuordnung umsetzt. Man sieht schnell, dass  $W$  nicht jeden 0/1-Punkt in  $\Delta^n$  auf einen Permutationsvektor abbildet. Zuerst klären wir, dass aber jeder Permutationsvektor ein eindeutiges Urbild hat.

**Lemma 3.2.1.** *Sei  $\pi \in \mathcal{S}_n$ . Dann ist  $W^{-1}(v^{(\pi)}) = \{y^{(\pi)}\}$ .*

*Beweis.* Man rechnet leicht nach, dass  $W(y^{(\pi)}) = v^{(\pi)}$  gilt. Sei nun  $y \in \Delta^n$  so, dass  $W(y) = v^{(\pi)}$ . Zur einfacheren Bestimmung von  $y$  definieren wir  $\tilde{y} \in [0, 1]^{n \times n}$  wie folgt:

$$\tilde{y}_{i,j} = \begin{cases} y_{i,j} & i < j \\ 1 - y_{j,i} & i > j \\ 0 & i = j. \end{cases}$$

Damit gilt für alle  $j \in [n]$

$$\pi(j) = v_j^{(\pi)} = W(y) = \sum_{i < j} y_{i,j} + \sum_{i > j} (1 - y_{j,i}) + 1 = \sum_{i=1}^n \tilde{y}_{i,j} + 1.$$

Für  $k \in [n]$  sei  $j_k = \pi^{-1}(k)$ . Per Induktion über  $k \in [n]$  zeigen wir nun, dass  $\tilde{y}_{i,j_k} \in \{0, 1\}$  und  $\tilde{y}_{i,j_k} = 1$  genau dann gilt, wenn  $\pi(i) < \pi(j_k)$ . Für  $k = 1$  haben wir  $0 = \pi(j_1) - 1 = \sum_{i=1}^n \tilde{y}_{i,j_1}$  und wegen  $\tilde{y} \geq \mathbb{0}$  erhalten wir  $\tilde{y}_{i,j_1} = 0$  für alle  $i \in [n]$ .

Sei nun  $k \in [n] \setminus \{1\}$ . Für  $l \in [k-1]$  ist  $\pi(j_k) = k > l = \pi(j_l)$ , also nach Induktionsvoraussetzung  $\tilde{y}_{j_l,j_k} = 1 - \tilde{y}_{j_k,j_l} = 1$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \sum_{i=1}^n \tilde{y}_{i,j_k} + 1 \right) - \pi(j_k) \\ &= \left( \sum_{l=1}^n \tilde{y}_{l,j_k} + 1 \right) - k \\ &= \left( \sum_{l=1}^{k-1} \tilde{y}_{l,j_k} + \tilde{y}_{j_k,j_k} + \sum_{l=k+1}^n \tilde{y}_{l,j_k} + 1 \right) - k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( (k-1) + 0 + \sum_{l=k+1}^n \tilde{y}_{j_l, j_k} + 1 \right) - k \\
&= \sum_{l=k+1}^n \tilde{y}_{j_l, j_k},
\end{aligned}$$

und wieder wegen  $\tilde{y} \geq \mathbb{0}$ , dass  $\tilde{y}_{j_l, j_k} = 0$  für  $l > k$ . Da  $\tilde{y}$  durch  $\pi$  eindeutig bestimmt ist, ist es auch  $y$ .  $\square$

Wir müssen uns nun noch davon überzeugen, dass die Bilder von 0/1-Punkten, die keine Permutationsvektoren ergeben, dennoch im Permutaeder liegen.

**Satz 3.2.2.**  $W(\Delta^n) = P_{\text{perm}}^n$ .

*Beweis.* Mit Lemma 3.2.1 erhalten wir bereits  $P_{\text{perm}}^n \subseteq W(\Delta^n)$ . Sei nun  $y \in \Delta^n$ . Dann gilt für  $\emptyset \neq S \subseteq [n]$

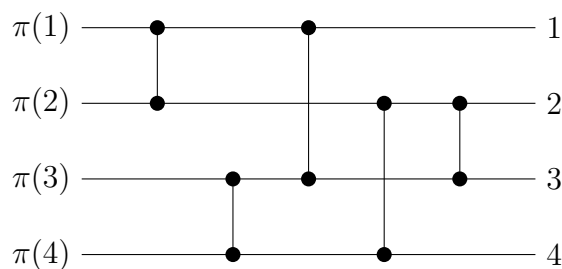
$$\begin{aligned}
\sum_{j \in S} W(y)_j &= \sum_{j \in S} \left( \sum_{i < j} y_{i,j} + \sum_{i > j} (1 - y_{j,i}) + 1 \right) \\
&= \sum_{\substack{i < j \\ j \in S}} y_{i,j} + \sum_{\substack{i < j \\ i \in S}} (1 - y_{i,j}) + |S| \\
&= \underbrace{\sum_{\substack{i < j \\ i \in S \\ j \in S}} y_{i,j} + \sum_{\substack{i < j \\ i \in S \\ j \in S}} (1 - y_{i,j})}_{= \frac{|S| \cdot (|S| - 1)}{2}} + \underbrace{\sum_{\substack{i < j \\ i \notin S \\ j \in S}} y_{i,j} + \sum_{\substack{i < j \\ i \in S \\ j \notin S}} (1 - y_{i,j})}_{\geq 0} + |S| \\
&\geq \frac{|S|(|S| - 1)}{2} + |S| = \frac{|S|(|S| + 1)}{2}.
\end{aligned}$$

Damit erfüllt  $W(y)$  die Ungleichungen (3.2) des Permutaeders. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n W(y)_j &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i < j} y_{i,j} + \sum_{i > j} (1 - y_{j,i}) + 1 \right) \\
&= \sum_{i < j} y_{i,j} + \sum_{i < j} (1 - y_{i,j}) + n \\
&= \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Also liegt  $W(y)$  auch im affinen Unterraum, der von der Gleichung (3.1) definiert wird und somit ist  $W(y) \in P_{\text{perm}}^n$ .  $\square$

Die Beschreibung von  $\Delta^n$  zusammen mit der Abbildung  $W$  liefert also wieder eine erweiterte Formulierung des Permutaeders der Größe  $\Theta(n^2)$ . Dennoch wird sie für uns interessant sein, wenn es darum geht, erweiterte Formulierungen für Subpolytope des Permutaeders zu finden.

Abbildung 3.3: Sortiernetzwerk für  $n = 4$  mit fünf Vergleichselementen

### 3.2.3 Sortiernetzwerk-Erweiterung

Bisher sind wir nicht auf die Erweiterungskomplexität des Permutaeders eingegangen. Eine untere Schranke, die sich leicht für das Permutaeder ermitteln lässt, ist der Logarithmus der Eckenanzahl aus Satz 2.3.2. Sie liefert die Abschätzung

$$\text{xc}(P_{\text{perm}}^n) \geq \log(v(P_{\text{perm}}^n)) = \log(n!) = \log(2^{\Theta(n \log n)}) = \Theta(n \log n). \quad (3.7)$$

In diesem Abschnitt werden wir nun eine erweiterte Formulierung des Permutaeders von Goemans [12] vorstellen, die tatsächlich mit nur  $\Theta(n \log n)$  Ungleichungen auskommt und somit asymptotisch optimal ist. Dabei bedient er sich des Begriffs des *Sortiernetzwerks*, auf den wir hier kurz eingehen.

Ein *Vergleichselement* ist eine Funktion der Form  $\tau_{k,l}: \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  für  $1 \leq k < l \leq n$  mit

$$(\tau_{k,l}(\pi))(i) = \begin{cases} \min\{\pi(k), \pi(l)\}, & \text{falls } i = k \\ \max\{\pi(k), \pi(l)\}, & \text{falls } i = l \\ \pi(i), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.8)$$

Ein Sortiernetzwerk ist nun eine endliche Folge  $(\tau_{k_1, l_1}, \dots, \tau_{k_m, l_m})$  solcher Vergleichsfunktionen, so dass

$$\tau_{k_m, l_m} \circ \dots \circ \tau_{k_1, l_1}(\pi) = \text{id}$$

für alle  $\pi \in \mathcal{S}_n$  gilt. Für eine Permutation  $\pi \in \mathcal{S}_n$  bezeichnen wir mit  $\pi^{(j)}$  das Bild von  $\pi$  nach Anwendung der ersten  $j$  Vergleichselemente des Sortiernetzwerks, also  $\pi^{(j)} = \tau_{k_j, l_j} \circ \dots \circ \tau_{k_1, l_1}(\pi)$ . Dabei setzen wir  $\pi^{(0)} = \pi$ .

Grafisch lassen sich Sortiernetzwerke wie in Abbildung 3.3 darstellen. Dabei kann man sich die Werte  $\pi(1), \dots, \pi(n)$  gerade als Eingabewerte an den linken Enden der horizontalen Linien und die Vergleichselemente als die vertikalen Linien, die die dort „ankommenden“ Werte gegebenenfalls vertauschen, vorstellen.

Als Größe eines Sortiernetzwerks bezeichnet man die Anzahl seiner Vergleichselemente. Man kann sehr einfach Sortiernetzwerke der Größe  $\mathcal{O}(n^2)$  konstruieren, indem man bekannte Sortieralgorithmen wie Bubble Sort oder Insertion Sort imitiert. Ajtai, Komlós und Szemerédi [1] konnten 1983 jedoch Sortiernetzwerke konstruieren, die nur  $\mathcal{O}(n \log n)$  viele Vergleichselemente benötigen.

Im Folgenden setzen wir voraus, dass ein festes Sortiernetzwerk gegeben ist. Goemans' Idee beruht nun auf der Tatsache, dass die Menge der Permutationsvektoren der Größe

$n$  gerade den Vektoren entspricht, deren Einträge man zum Vektor  $(1, 2, \dots, n)$  sortieren kann. Neben Variablen  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , die den Einträgen der Permutationsvektoren entsprechen sollen, führen wir für jedes Vergleichselement  $\tau_{k_j, l_j}$  Variablen  $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$  ein, die das Bild des Permutationsvektors  $x^{(0)}$  nach Anwendung der ersten  $j$  Vergleichselemente modellieren.

Die Funktionalität der Vergleichselemente in 3.8 lässt sich nun folgendermaßen linear relaxieren: Für  $j \in [m]$  fordern wir

$$x_{k_j}^{(j)} \leq x_{k_j}^{(j-1)} \quad (3.9)$$

$$x_{l_j}^{(j)} \leq x_{l_j}^{(j-1)} \quad (3.10)$$

$$x_{k_j}^{(j-1)} + x_{l_j}^{(j-1)} = x_{k_j}^{(j)} + x_{l_j}^{(j)}, \quad (3.11)$$

sowie zusätzlich für alle  $i \in [n] \setminus \{k_j, l_j\}$

$$x_i^{(j)} = x_i^{(j-1)}. \quad (3.12)$$

Zudem fordern wir

$$x_i^{(m)} = i \quad (3.13)$$

für alle  $i \in [n]$ , um die Sortiereigenschaft des Netzwerks zu modellieren. Bezeichne  $Q$  die Menge der Punkte  $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ , die das System (3.9) – (3.13) erfüllen. Ist nun  $x^{(0)} = v^{(\pi)}$  für  $\pi \in \mathcal{S}_n$  ein Permutationsvektor, so komplettiert man ihn zu einem zulässigen Punkt von  $Q$ , indem man  $x^{(j)} = v^{(\pi^{(j)})}$  setzt.

Umgekehrt kann man sich für jeden Punkt  $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}) \in Q$  überlegen, dass jeder der Vektoren  $x^{(j)}$  für  $j = 0, \dots, m$  die (Un-)Gleichungen des Permutaeders erfüllt. Schließlich erhält man:

**Satz 3.2.3** (Goemans [12]). *Für ein gegebenes Sortiernetzwerk liefern die Gleichungen und Ungleichungen (3.9) – (3.13) zusammen mit der Projektion auf die Variablen  $x^{(0)}$  eine erweiterte Formulierung für das Permutaeder.*

Für ein Sortiernetzwerk der Größe  $m$  benötigen wir in obiger Formulierung lediglich  $2m$  Ungleichungen. Setzen wir nun ein Sortiernetzwerk der Größe  $\mathcal{O}(n \log n)$  voraus, erhalten wir auch eine erweiterte Formulierung des Permutaeders der Größe  $\mathcal{O}(n \log n)$ .

### 3.3 Qualität der unteren Schranken an die Erweiterungskomplexität

Wir haben gesehen, dass die Erweiterungskomplexität des Permutaeders in  $\Theta(n \log n)$  liegt. Als asymptotisch scharfe, untere Schranke diente uns dazu der Logarithmus der Eckenanzahl. Jedoch haben wir in Abschnitt 2.3.3 weitere Schranken an  $xc(P)$  vorgestellt, deren Qualität hier zum Teil anhand von  $P_{\text{perm}}^n$  untersucht werden soll.

Zunächst sei bemerkt, dass mit dem Logarithmus der Eckenanzahl auch die Rechtecküberdeckungsanzahl des Permutaeders eine asymptotisch scharfe Schranke an dessen Erweiterungskomplexität liefert.



Als einfach einzusehende Schranke an  $\text{xc}(P)$  haben wir in Satz 2.3.6 die Cliquenzahl des Rechteckgraphen angegeben. Wir haben jedoch bereits festgestellt, dass jede Ecke des Permutaeders zu  $n - 1$  vielen Facetten inzident ist. Aus Satz 2.3.7 folgt damit direkt:

**Folgerung 3.3.1.** *Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\omega(\mathcal{R}(P_{\text{perm}}^n)) \leq n$ .*

Damit kann die Cliquenzahl des Permutaeders keine asymptotisch scharfe Schranke an  $\text{xc}(P_{\text{perm}}^n)$  liefern. Als weitere untere Schranke an die  $\text{xc}(P)$  haben wir in Satz 2.3.8 den Ausdruck  $\iota_0(\mathcal{R}(P)) = \frac{|\mathcal{N}(P)|}{\alpha(\mathcal{R}(P))}$  vorgestellt.

Um diesen Ausdruck leichter abschätzen zu können, werden wir die Knotenmenge des Rechteckgraphen  $\mathcal{R}(P_{\text{perm}}^n)$  etwas anschaulicher beschreiben. Die Ecken des Permutaeders korrespondieren zu Permutationen  $\pi \in \mathcal{S}_n$ . Da alle Facetten des Permutaeders von den Ungleichungen (3.2) induziert werden, werden wir sie mit den Mengen  $\emptyset \neq S \subset [n]$  identifizieren. Nun erfüllt ein Permutationsvektor  $v^{(\pi)}$  die Gleichung  $\sum_{i \in S} v_i^{(\pi)} = \frac{|S|(|S|+1)}{2}$  genau dann, wenn  $\pi(S) := \{\pi(i) \mid i \in S\} = [|S|]$  gilt. Damit lässt sich die Menge der Nichtinzidenzen des Permutaeders auch folgendermaßen auffassen:

$$V(\mathcal{R}(P_{\text{perm}}^n)) = \mathcal{N}(P_{\text{perm}}^n) = \{(S, \pi) \mid \emptyset \neq S \subset [n], \pi \in \mathcal{S}_n, \pi(S) \neq [|S|]\}$$

Die Kardinalität dieser Knotenmenge beträgt

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}(P_{\text{perm}}^n)| &= |\{(S, \pi) \mid \emptyset \neq S \subset [n], \pi \in \mathcal{S}_n\}| \\ &\quad - |\{(S, \pi) \mid \emptyset \neq S \subset [n], \pi \in \mathcal{S}_n, \pi(S) = [|S|]\}| \\ &= (2^n - 2)n! - n!(n - 1) = \Theta(2^n \cdot n!). \end{aligned}$$

Wie für  $\omega(\mathcal{R}(P))$  sieht man nun schnell, dass auch  $\iota_0(\mathcal{R}(P))$  in diesem Fall keine asymptotisch scharfe Schranke an die Erweiterungskomplexität liefert:

**Proposition 3.3.2.** *Es gilt  $\iota_0(\mathcal{R}(P_{\text{perm}}^n)) \leq \mathcal{O}(n)$ .*

*Beweis.* Inspiriert durch Abbildung 2.2 konstruieren wir die Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{S \mid \emptyset \neq S \subset [n], 1 \notin S\}, \\ \mathcal{V} &= \{\pi \mid \pi \in \mathcal{S}_n, \pi(1) = 1\}. \end{aligned}$$

Für alle  $(S, \pi) \in \mathcal{S} \times \mathcal{V}$  gilt offenbar  $\pi(S) \neq [|S|]$ . Damit bildet  $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$  eine stabile Menge in  $\mathcal{R}(P_{\text{perm}}^n)$ . Somit sehen wir, dass

$$\frac{|\mathcal{N}(P_{\text{perm}}^n)|}{\alpha(\mathcal{R}(P_{\text{perm}}^n))} \leq \frac{|\mathcal{N}(P_{\text{perm}}^n)|}{|\mathcal{S} \times \mathcal{V}|} = \mathcal{O}\left(\frac{2^n \cdot n!}{\frac{2^n - 2}{2}(n - 1)!}\right) = \mathcal{O}(n).$$

□

## 4 Antistabile 0/1-Polytope

In Satz 3.1.3 haben wir Situationen beschrieben, in denen man für Subpolytope eines Polyeders  $P$  aus dessen linearer Beschreibung eine explizite äußere Darstellung gewinnen kann, falls diese durch Entfernen einer stabilen Menge von Ecken von  $P$  entstanden sind. Sie waren dadurch charakterisiert, dass die Menge der Nachbarn einer jeden solchen Ecke auf einer Hyperebene liegen. Ein Polyeder, das diese Bedingung für jede seiner Ecken erfüllt, ist der  $n$ -dimensionale Würfel  $[0, 1]^n$ .

Die Ecken des Einheitswürfels entsprechen gerade den Vektoren  $\{0, 1\}^n$ . Zwei solche Ecken sind genau dann benachbart, wenn sie sich in genau einer Koordinate unterscheiden. Ist  $v \in \{0, 1\}^n$ , so ist die Ungleichung

$$\sum_{v_i=0} x_i + \sum_{v_i=1} (1 - x_i) \geq 1 \quad (4.1)$$

gültig für alle Punkte  $x \in \{0, 1\}^n \setminus \{v\}$ . Zudem erfüllen alle Nachbarn von  $v$  obige Ungleichung mit Gleichheit. Ein Polytop  $P$  nennen wir nun *antistabiles 0/1-Polytop*, falls eine Menge  $S \subseteq \{0, 1\}^n$  existiert, so dass  $S$  stabil in  $G([0, 1]^n)$  ist und  $P = \text{conv}(\{0, 1\}^n \setminus S)$  gilt. Dabei sagen wir, dass  $P$  aus  $[0, 1]^n$  durch das Entfernen der Punkte aus  $S$  entstanden ist. Diese Klasse von Polytopen wird in späteren Teilen dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen, weshalb sie hier näher untersucht werden soll.

### 4.1 Erste Eigenschaften

Zunächst können wir aus Satz 3.1.3 eine äußere Beschreibung für alle 0/1-Polytope folgern:

**Satz 4.1.1.** *Ist  $S \subseteq \{0, 1\}^n$  eine stabile Menge in  $G([0, 1]^n)$ , so lässt sich  $P = \text{conv}(\{0, 1\}^n \setminus S)$  via*

$$P = \{x \in [0, 1]^n \mid \sum_{v_i=0} x_i + \sum_{v_i=1} (1 - x_i) \geq 1 \ \forall v \in S\}$$

*beschreiben.*

Ist also  $P \subseteq [0, 1]^n$  ein 0/1-Polytop, das durch das Entfernen von  $k$  Punkten entstanden ist, so können wir es durch  $2n + k$  Ungleichungen beschreiben. Um die Antistabilität eines 0/1-Polytops zu bewahren, kann man sicher nicht beliebig viele Ecken des Würfels entfernen. Eine untere Schranke für die Anzahl der Ecken, die übrig bleiben müssen, erhält man aus folgender Beobachtung:

**Lemma 4.1.2.** *Sei  $G = (V, E)$  ein  $d$ -regulärer Graph für  $d \in \mathbb{N}$ , d. h., jeder Knoten in  $G$  ist zu genau  $d$  weiteren Knoten benachbart. Dann ist  $\alpha(G) \leq \frac{1}{2}|V|$ .*

*Beweis.* Sei  $S \subseteq V$  eine stabile Menge in  $G$ . Dann ist  $T = V \setminus S$  eine Knotenüberdeckung von  $G$ , d. h., jede Kante aus  $E$  ist inzident zu einem Knoten aus  $T$ . Da jeder Knoten Grad  $d$  hat, muss  $d \cdot |T| \geq |E|$  gelten. Wir erhalten

$$|S| = |V| - |T| \leq |V| - \frac{1}{d}|E| = |V| - \frac{1}{d} \frac{d \cdot |V|}{2} = \frac{1}{2}|V|.$$

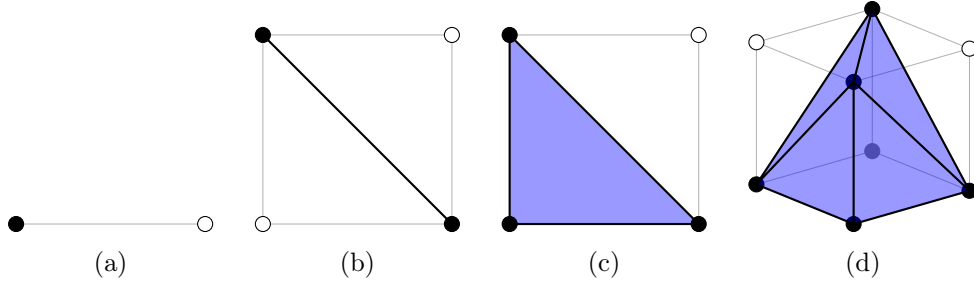


Abbildung 4.1: Beispiele antistabiler 0/1-Polytope, die durch Entfernen der weißen Würfelcken entstanden sind. Für alle diese Polytope  $P$  existiert eine Würfel-  
seite, deren Schnitt mit  $P$  keine Facette von  $P$  mehr ist. Die Polytope in  
(a) und (b) sind zudem niederdimensional.

□

Der Graph des Würfels  $[0, 1]^n$  ist offenbar  $n$ -regulär und verfügt über  $2^n$  Ecken. Wir erhalten:

**Folgerung 4.1.3.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $P \subseteq [0, 1]^n$  ein antistabiles 0/1-Polytop. Dann gilt  $\mathcal{V}(P) \geq 2^{n-1}$ .

In Abbildung 4.1 sind Beispiele antistabiler 0/1-Polytope gegeben, für die einige der Würfelungleichungen  $x_i \geq 0$  bzw.  $x_i \leq 1$  keine Facetten induzieren. Zudem sind einige dieser Polytope niederdimensional. Diese Fälle können in höheren Dimensionen jedoch nicht mehr auftreten.

**Satz 4.1.4.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $P \subseteq [0, 1]^n$  ein antistabiles 0/1-Polytop.

- a) Für  $n \geq 3$  ist  $\dim P = n$ .
- b) Für  $n \geq 4$  induzieren sowohl die Würfelungleichungen  $x_i \geq 0$  bzw.  $x_i \leq 1$  als auch die Ungleichungen vom Typ (4.1) paarweise verschiedene Facetten von  $P$ .

*Beweis.* Sei  $P = \text{conv}(\{0, 1\}^n \setminus S)$  für eine stabile Menge  $S \subseteq \{0, 1\}^n$ . Für  $n \geq 3$  sei  $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{n} \leq x_i \leq 1 - \frac{1}{n}\} \subseteq [0, 1]^n$  ein um den Faktor  $1 - \frac{2}{n} \in (0, 1)$  gestauchter und verschobener Einheitswürfel. Nun gilt für alle  $x \in C$  und  $v \in S$

$$\sum_{v_i=0} x_i + \sum_{v_i=1} (1 - x_i) \geq \sum_{v_i=0} \frac{1}{n} + \sum_{v_i=1} (1 - (1 - \frac{1}{n})) = 1.$$

Mit Satz 4.1.1 gilt somit  $C \subseteq P$ . Es folgt  $\dim P \geq \dim C = n$ .

Sei nun  $n \geq 4$ . Für jedes  $v \in S$  sind all seine Nachbarecken aus  $[0, 1]^n$  auch in  $P$  enthalten. Diese  $n = \dim P$  Punkte sind affin unabhängig und erfüllen die zugehörige Ungleichung (4.1) alle mit Gleichheit. Damit induziert sie eine Facette von  $P$ .

Sei nun  $F$  die Seite von  $P$ , die durch eine Würfelungleichung  $x_i \geq 0$  oder  $x_i \leq 1$  für ein  $i \in [n]$  induziert wird. Mit dem affinen Isomorphismus  $p: F \rightarrow [0, 1]^{n-1}$ , der die  $i$ -te Koordinate vergisst, ist  $p(F)$  offenbar ein antistabiles 0/1-Polytop in  $[0, 1]^{n-1}$ . Da  $n-1 \geq 3$  gilt, folgt mit Teil a) nun  $\dim(F) = \dim(p(F)) = n - 1$ .

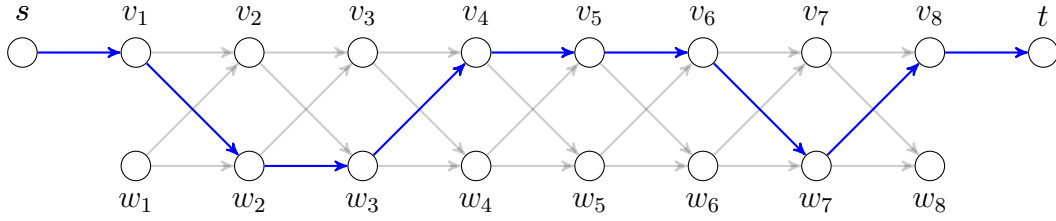


Abbildung 4.2: Weg  $S$  (blau) im Hilfsgraphen  $D$  für die erweiterte Formulierung für das Parity-Polytop mit  $x^{(S)} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1) \in P_{\text{even}}^7$ .

Damit induzieren alle betrachteten Ungleichungen Facetten von  $P$ . Zudem sind die durch die Ungleichungen definierten Halbräume offenbar paarweise verschieden. Da  $P$  volldimensional ist, sind also auch die zugehörigen Facetten paarweise verschieden.  $\square$

Mit Folgerung 4.1.3 und Satz 2.3.2 sieht man sofort, dass jede Erweiterung für ein antistabiles 0/1-Polytop durch mindestens  $n - 1$  Ungleichungen beschrieben werden muss. Ist die Anzahl der entfernten Ecken des Würfels linear in  $n$ , so liefert schon die Beschreibung aus Satz 4.1.1 im Originalraum eine asymptotisch optimale erweiterte Formulierung. In folgendem Abschnitt soll ein antistabiles 0/1-Polytop vorgestellt werden, das über exponentiell viele Facetten verfügt, aber dennoch eine Erweiterung bietet, die sich ebenfalls mit linear vielen Ungleichungen beschreiben lässt.

## 4.2 Parity-Polytop

Das *Parity-Polytop* ist die konvexe Hülle aller Vektoren in  $\{0, 1\}^n$ , die eine gerade Anzahl von Einsen enthalten und sei kurz mit  $P_{\text{even}}^n$  bezeichnet. Zwei 0/1-Vektoren, die beide eine ungerade Anzahl von Einsen enthalten, sind im Graphen des Würfels sicher nicht benachbart. Damit ist das Parity-Polytop ein antistabiles 0/1-Polytop. Es verfügt über  $2^{n-1}$  Ecken und lässt sich nach Satz 4.1.1 beschreiben durch

$$P_{\text{even}}^n = \{x \in [0, 1]^n \mid \sum_{i \in [n] \setminus S} x_i + \sum_{i \in S} (1 - x_i) \geq 1 \ \forall S \subseteq [n] \text{ mit } |S| \in 2\mathbb{Z} + 1\}.$$

Zudem verfügt  $P_{\text{even}}^n$  mit Satz 4.1.4 für  $n \geq 4$  über  $2n + 2^{n-1}$ , also exponentiell viele Facetten. In [6] findet sich nun eine erstaunlich kompakte erweiterte Formulierung für das Parity-Polytop, die hier vorgestellt werden soll.

Betrachtet man den gerichteten Graphen  $D = (V, A)$  mit

$$\begin{aligned} V &= \{s\} \dot{\cup} \{t\} \dot{\cup} \{v_1, \dots, v_{n+1}\} \dot{\cup} \{w_1, \dots, w_{n+1}\} \\ A &= \{(s, v_1)\} \cup \{(v_{n+1}, t)\} \\ &\quad \cup \{(v_i, v_{i+1}), (v_i, w_{i+1}), (w_i, v_{i+1}), (w_i, w_{i+1}) \mid i \in [n]\}, \end{aligned}$$

so kann man einem  $s - t$ -Weg  $S \subseteq A$  in  $D$  den Vektor  $x^{(S)} \in \{0, 1\}^A$  mit

$$x_i^{(S)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{(v_i, w_{i+1}), (w_i, v_{i+1})\} \cap S \neq \emptyset \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

zuordnen. Dabei ist  $x^{(S)} \in P_{\text{even}}^n$ . Umgekehrt existiert auch für jeden Punkt  $x \in P_{\text{even}}^n \cap \mathbb{Z}^n$  ein gerichteter  $s-t$ -Weg  $S$  in  $D$ , so dass  $x = x^{(S)}$ . Mit einem Beispiel in Abbildung 4.2 sieht man beide Sachverhalte schnell ein. Damit ist

$$P_{\text{even}}^n = \text{conv}\{x^{(S)} \mid S \text{ ist } s-t\text{-Weg in } D\}. \quad (4.2)$$

Weiterhin definieren wir für eine Menge  $S \subseteq A$  ihren charakteristischen Vektor  $y^{(S)} \in \{0, 1\}^A$  über

$$y_a^{(S)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \in S \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit der Abbildung

$$p: \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p(y)_i = y_{(v_i, w_{i+1})} + y_{(w_i, v_{i+1})} \text{ für } i \in [n]$$

gilt wegen (4.2) offenbar  $p(y^{(S)}) \in P_{\text{even}}^n$  genau dann, wenn  $S$  ein  $s-t$ -Weg in  $D$  ist. Ist nun  $P_D = \text{conv}\{y^{(S)} \mid S \text{ ist } s-t\text{-Weg in } D\} \subseteq \mathbb{R}^A$ , so gilt also  $p(P_D) = P_{\text{even}}^n$ . Als klassisches, azyklisches *Netzwerk-Polytop* lässt sich  $P_D$  durch

$$P_D = \{y \in \mathbb{R}^A \mid \begin{array}{ll} y(\delta^{\text{out}}(s)) = 1 & \\ y(\delta^{\text{in}}(t)) = 1 & \\ y(\delta^{\text{in}}(v_i)) = y(\delta^{\text{out}}(v_i)) & \forall i \in [n+1] \\ y(\delta^{\text{in}}(w_i)) = y(\delta^{\text{out}}(w_i)) & \forall i \in [n+1] \\ y \geq \mathbb{0}_A & \end{array} \},$$

also mit  $|A| = \mathcal{O}(n)$  vielen Ungleichungen, beschreiben, vgl. [18].

### 4.3 Aussagen zur Erweiterungskomplexität

Anders als in obigen Fällen stellt sich heraus, dass die Erweiterungskomplexität antistabiler 0/1-Polytope im Allgemeinen nicht linear – sogar nicht einmal polynomiell – groß in  $n$  sein muss: In [16] stellt Rothvoß fest, dass nicht alle 0/1-Polytope über eine polynomiell große erweiterte Formulierung verfügen können, da die Anzahl dieser Polytope doppelt exponentiell in  $n$  wächst. Konkret findet sich in seiner Argumentation (wenn auch nicht explizit) die folgende Aussage:

**Satz 4.3.1** (Rothvoß). *Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{X}(n)$  eine Menge von Mengen  $X \subseteq \{0, 1\}^n$  und  $R = R(n) = \max \{xc(\text{conv}(X)) \mid X \in \mathcal{X}(n)\}$ . Dann existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass*

$$|\mathcal{X}(n)| \leq 2^{C(n^4 + n \log(2n) \cdot R^2)}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

Wir übertragen nun diese Aussage auf den Fall, dass  $\mathcal{X}(n)$  den Eckenmengen von antistabilen 0/1-Polytopen entspricht und zeigen, dass die Kardinalität von  $\mathcal{X}(n)$  ebenfalls doppelt exponentiell wächst.

**Satz 4.3.2.** *Es gibt eine Konstante  $C' > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein antistabiles 0/1-Polytop  $P \in [0, 1]^n$  existiert, so dass*

$$\text{xc}(P) \geq C' \cdot 2^{\frac{n}{4}} / \sqrt{n \log(2n)}$$

*gilt.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{X}(n)$  die Menge der Eckenmengen von antistabilen 0/1-Polytopen. Sei zudem  $Y \subseteq \{0, 1\}^n$  die Eckenmenge des Parity-Polytops der Ordnung  $n$ . Wir wissen bereits, dass  $Y \in \mathcal{X}(n)$  ist. Jede Menge  $X$  mit  $Y \subseteq X \subseteq \{0, 1\}^n$  ist ebenfalls Eckenmenge eines antistabilen 0/1-Polytops. Damit gilt

$$|\mathcal{X}(n)| \geq |\{X \in \{0, 1\}^n \mid Y \subseteq X\}| = 2^{|\{0, 1\}^n \setminus Y|} = 2^{2^{n/2}}.$$

Ist  $R = R(n)$  der maximale Wert der Erweiterungskomplexität eines antistabilen 0/1-Polytops in  $[0, 1]^n$ , so erhalten wir mit Satz 4.3.1 also

$$2^{2^{n/2}} \leq 2^{C(n^4 + n \log(2n) \cdot R^2)}$$

für ein konstantes  $C > 0$ . Es folgt

$$R \geq \sqrt{\frac{\frac{1}{C} 2^{n/2} - n^4}{n \log(2n)}} = \Theta\left(2^{\frac{n}{4}} / \sqrt{n \log(2n)}\right).$$

□

Schließlich können wir die oben angedeutete Aussage konkret formulieren:

**Folgerung 4.3.3.** *Es existiert kein Polynom  $P$ , so dass die Erweiterungskomplexität eines jeden 0/1-Polytops in  $[0, 1]^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  durch  $P(n)$  beschränkt ist.*

Um eine Klasse von antistabilen 0/1-Polytopen explizit angeben zu können, deren Erweiterungskomplexitäten etwa exponentiell wachsen, müssen wir klären, inwiefern man die in Abschnitt 2.3 vorgestellten unteren Schranken heranziehen kann, um ein solches Wachstum zu begründen. Jede Ecke eines antistabilen 0/1-Polytops liegt in höchstens  $n$  Würfel-Facetten sowie in höchstens  $n$  Facetten, die seine Nachbarn abtrennen. Damit ist die Cliquenzahl des Rechteckgraphen solcher Polytope nach Satz 2.3.7 höchstens linear in  $n$ .

Tatsächlich stellt man sogar fest, dass die Rechtecküberdeckungsanzahl antistabiler 0/1-Polytope nur linear groß in  $n$  sein kann:

**Satz 4.3.4.** *Sei  $P \subseteq [0, 1]^n$  ein antistabiles 0/1-Polytop. Dann gilt  $\text{rc}(P) \leq 6n - 4$ .*

*Beweis.* Wir geben eine Menge von  $6n$  Rechtecken an, die alle Nichtinzidenzen in  $\mathcal{N}(P)$  überdeckt. Wir können annehmen, dass sowohl die Würfelungleichungen als auch die Ungleichungen vom Typ (4.1) paarweise verschiedene Facetten von  $P$  induzieren. Anderenfalls entfernen wir sie aus der folgenden Konstruktion und erhalten weiterhin eine gültige Überdeckung.

Für  $(F, v) \in \mathcal{N}(P)$  unterscheiden wir, ob die Facette  $F$  durch eine Würfelungleichung induziert wurde oder nicht. Erstere Nichtinzidenzen lassen sich offenbar mit den  $2n$  Rechtecken

$$\{\{x \in P \mid x_i = 0\}\} \times \{v \in \mathcal{V}(P) \mid v_i = 1\}$$

sowie

$$\{\{x \in P \mid x_i = 1\}\} \times \{v \in \mathcal{V}(P) \mid v_i = 0\}$$

für  $i \in [n]$  überdecken.

Seien  $W \subseteq \{0, 1\}^n$  die Ecken des Würfels, die nicht in  $P$  enthalten sind. Dann können wir die restlichen Nichtinzidenzen  $(F, v) \in \mathcal{N}(P)$  mit Tupeln  $(w, v)$  identifizieren, wobei  $w \in W$  und  $F$  die Facette ist, die den Punkt  $w$  von  $P$  abtrennt. Nun entspricht  $(w, v)$  genau dann einer Nichtinzidenz, wenn sich  $w$  und  $v$  in mindestens zwei Koordinaten unterscheiden. Um die Menge dieser Nichtinzidenzen zu überdecken, teilen wir die Ecken des Würfels in die Mengen

$$V_{i,a,b} := \{v \in \{0, 1\}^n \mid v_i = a, \sum_{j=1}^{i-1} v_j \equiv b \pmod{2}\},$$

wobei  $i \in [n] \setminus \{1\}$  und  $a, b \in \{0, 1\}$ , auf. Dann bilden die Mengen

$$\begin{aligned} R_i^{(1)} &:= (W \cap V_{i,0,0}) \times (\mathcal{V}(P) \cap V_{i,1,1}) \\ R_i^{(2)} &:= (W \cap V_{i,0,1}) \times (\mathcal{V}(P) \cap V_{i,1,0}) \\ R_i^{(3)} &:= (W \cap V_{i,1,0}) \times (\mathcal{V}(P) \cap V_{i,0,1}) \\ R_i^{(4)} &:= (W \cap V_{i,1,1}) \times (\mathcal{V}(P) \cap V_{i,0,0}) \end{aligned}$$

für  $i \in [n] \setminus \{1\}$  offenbar Rechtecke in der Menge dieser Nichtinzidenzen. Sind umgekehrt  $w \in W$  und  $v \in \mathcal{V}(P)$ , die sich in mindestens zwei Koordinaten unterscheiden, so findet man ein Rechteck  $R_i^{(j)} \ni (w, v)$ , indem man  $i$  als die zweite Koordinate wählt, an der sich  $w$  und  $v$  unterscheiden.  $\square$

Damit dienen sowohl die Rechtecküberdeckungszahl als auch alle auf der Färbungszahl des Rechteckgraphen beruhenden unteren Schranken höchstens dazu, das lineare Wachstum der Erweiterungskomplexität antistabiler 0/1-Polytope zu begründen.

## 4.4 Weitere Beispiele

Auf der Suche nach Vertretern von antistabilen 0/1-Polytopen, deren Erweiterungskomplexität etwa exponentiell in der Dimension wächst, stellt man fest, dass die Eckenmengen vieler bekannter 0/1-Polytope, wie etwa des *Traveling Salesman*- oder des *Perfect Matching*-Polytops, stabile Mengen im 0/1-Würfel bilden. Dementsprechend lassen sich antistabile 0/1-Polytope konstruieren, indem man ebendiese Punkte entfernt.

Eine Klasse weitaus elementarerer Beispiele für solche Polytope, ist die folgende:

**Beispiel** (Konvexe Hülle von Punkten, die nicht auf einer festen Hyperebene liegen)

Seien  $a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $a_i \neq 0$  für alle  $i \in [n]$  gegeben. Dann ist

$$P_{a,\beta} := \text{conv}\{x \in \{0,1\}^n \mid \langle a, x \rangle \neq \beta\}$$

ein antistabiles 0/1-Polytop. Sind nämlich  $v, w \in \{0,1\}^n$  mit  $\langle a, v \rangle = \langle a, w \rangle = \beta$  benachbart in  $G([0,1]^n)$ , unterscheiden sich also um genau eine Koordinate, etwa  $v_j = 1$  und  $w_j = 0$ , so folgt

$$0 = \langle a, v \rangle - \langle a, w \rangle = a_j,$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Mit  $\mathcal{P}_{\neq}^n$  sei die Menge all dieser Polytope  $P_{a,\beta} \subseteq [0,1]^n$  bezeichnet, wobei  $a$  und  $\beta$  variieren. Anders als für die Menge aller antistabilen 0/1-Polytope, wächst die Kardinalität von  $\mathcal{P}_{\neq}^n$  nicht mehr doppelt exponentiell in  $n$ : Ordnet man jedem solchen Polytop  $P_{a,\beta}$  eine maximale Menge von affin unabhängigen Punkten  $v \in \{0,1\}^n$  zu, die die Gleichung  $\langle a, v \rangle = \beta$  erfüllen, so herrscht eine Injektion von  $\mathcal{P}_{\neq}^n$  in die Menge der affin unabhängigen Eckenteilmengen des  $n$ -dimensionalen Würfels. Damit gilt

$$|\mathcal{P}_{\neq}^n| \leq \binom{2^n}{n+1} + \binom{2^n}{n} + \dots + \binom{2^n}{1} + 1 \leq (n+2) \binom{2^n}{n+1} \leq 2^{C \cdot n^2}$$

für genügend großes  $n$  und geeignet gewähltes  $C > 0$ . Demnach enthält  $\mathcal{P}_{\neq}^n$  zu wenige Polytope, um mit Satz 4.3.1 die Existenz von Polytopen  $P_{a,\beta}$ , deren Erweiterungskomplexität nicht polynomiell beschränkt in  $n$  ist, zu folgern.

**Beispiel** (Erweiterte Formulierung für  $P_{a,\beta}$ )

Seien wieder  $a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $a_i \neq 0$  für alle  $i \in [n]$  gegeben. Wir betrachten den Digraphen  $D_{a,\beta} = (V, A)$  mit

$$\begin{aligned} V &= \{t\} \cup \{(0,0)\} \cup \{(k, \sum_{i \in I} a_i) \mid k \in [n], I \subseteq [k]\} \\ A &= \{((k-1, z), (k, z + a_k)) \in V \times V \mid k \in [n]\} \\ &\cup \{((k-1, z), (k, z)) \in V \times V \mid k \in [n]\} \\ &\cup \{((n, z), t) \mid z \neq \beta\}. \end{aligned}$$

Jedem  $(0,0) - t$ -Weg  $W \subseteq A$  in  $D_{a,\beta}$  wird ein Vektor  $x \in \{0,1\}^n$  zugeordnet mit

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{falls } W \text{ einen Bogen der Form } ((k-1, z), (k, z + a_k)) \text{ enthält} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Zuordnung wird in Abbildung 4.3 an einem Beispiel dargestellt. Ist  $P_{D_{a,\beta}}$  die konvexe Hülle der charakteristischen Vektoren aller  $(0,0) - t$ -Wege, so lässt sich diese Abbildung mit der linearen Abbildung

$$p: \mathbb{R}^A \rightarrow P_{a,\beta}, \quad p(y)_k = \sum_{((k-1,z),(k,z+a_k)) \in A} y_{((k-1,z),(k,z+a_k))} \quad \text{für } k \in [n]$$



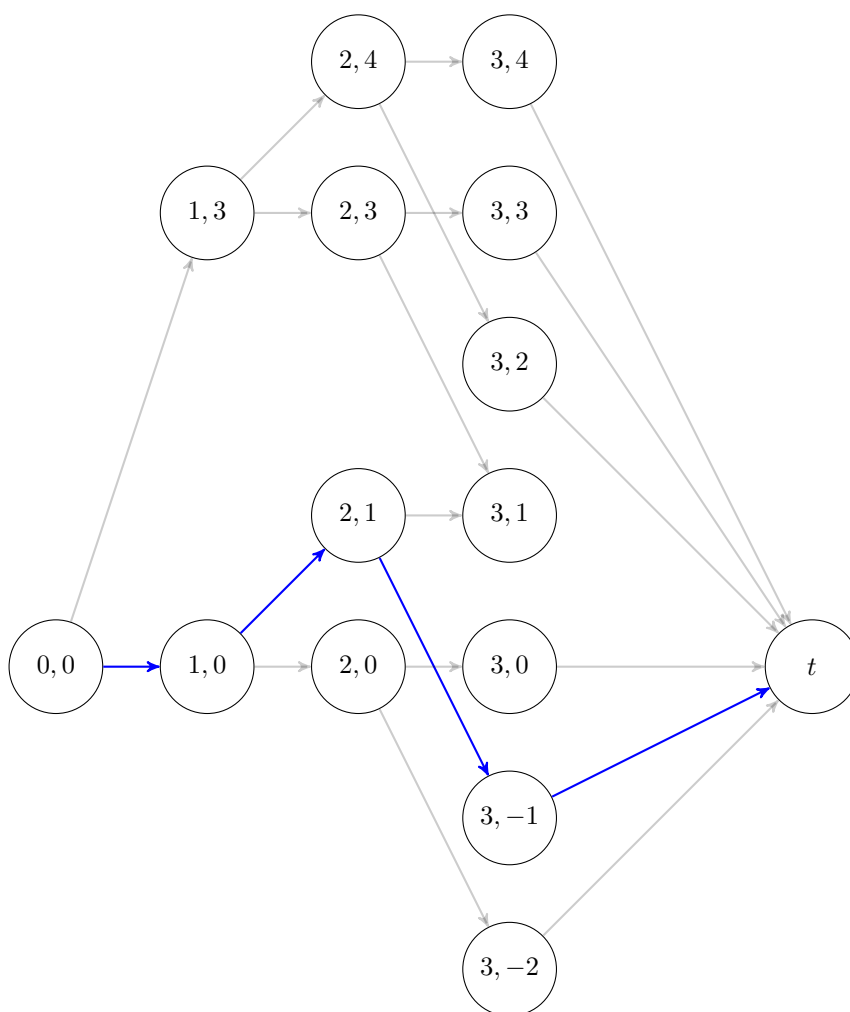


Abbildung 4.3: Hilfsgraph  $D_{a,\beta}$  für die erweiterte Formulierung für  $P_{a,\beta}$  mit  $a = (3, 1, -2)$  und  $\beta = 1$ . Der blaue Weg stellt ein Urbild des Vektors  $(0, 1, 1)$  dar.

realisieren. Zudem sieht man leicht, dass  $p$  surjektiv ist. Damit ist  $p(P_{D_{a,\beta}}) = P_{a,\beta}$ . Wie im Beispiel zum Parity-Polytop existiert auch für  $P_{D_{a,\beta}}$  eine erweiterte Formulierung, deren Größe linear in der Anzahl der Bögen in  $A$  ist.

Die Menge der Bögen in obiger Konstruktion lässt sich durch  $n \cdot |\{\sum_{i \in I} a_i \mid I \subseteq [n]\}|$  beschreiben. Ist also die Menge der möglichen Teilsummen der Einträge von  $a$  polynomiell in  $n$  beschränkt, so erhalten wir mit obiger Beschreibung auch eine erweiterte Formulierung polynomieller Größe für  $P_{a,\beta}$ .

Ein einfacher Spezialfall, in dem diese Situation eintritt, ist die, in der  $a$  nur Einträge aus  $\{-1, 1\}$  enthält. Da die Teilsummen nur Werte im Bereich  $\{-n, \dots, 0, \dots, n\}$  annehmen können, erhalten wir für  $P_{a,\beta}$  mit  $a \in \{-1, 1\}^n$  eine erweiterte Formulierung der Größe  $\mathcal{O}(n^2)$ . Wählt man etwa  $a = (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$  und  $\beta = 0$  für gerades  $n$ , so ist  $P_{a,\beta}$  durch das Entfernen von mehr als  $2^{\frac{n}{2}}$  Ecken des 0/1-Würfels entstanden. In diesem Fall bietet diese Formulierung eine weitaus kompaktere Beschreibung als die des

Originalraums. Dennoch lässt sie die Frage offen, ob es für alle Polytope in  $\mathcal{P}_{\neq}^n$  erweiterte Formulierungen gibt, deren Größe sich durch ein festes Polynom in  $n$  beschränken lässt.

Neben Fragestellungen zur asymptotischen Erweiterungskomplexität stellt die Ermittlung des exakten Wertes von  $\text{xc}(P)$  für einfach zu beschreibende antistabile 0/1-Polytope  $P$  eine ebenfalls interessante Aufgabe dar. Wie schon bemerkt, existiert für den einfachsten Vertreter der antistabilen 0/1-Polytope, den Einheitswürfel, keine erweiterte Formulierung, die mit weniger als  $2n$  Ungleichungen auskommt. Als kanonisch als nächstes zu untersuchendes Objekt bietet sich das folgende an:

**Beispiel** (Entfernen einer Ecke des Würfels)

Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $v \in \{0, 1\}^n$  sei

$$C^n(v) = \text{conv}(\{0, 1\}^n \setminus \{v\}).$$

Für die affine, bijektive Abbildung  $p_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$p_v(x)_i = \begin{cases} x_i, & \text{falls } v_i = 0 \\ 1 - x_i, & \text{falls } v_i = 1 \end{cases}$$

für  $i \in [n]$  gilt offenbar  $p_v(C^n(v)) = C^n(\mathbb{O}_n)$ . Insbesondere folgt  $\text{xc}(C^n(v)) = \text{xc}(C^n(w))$  für alle  $v, w \in \{0, 1\}^n$ .

In [11] wird eine Clique der Größe  $2n$  im Rechteckgraphen des Einheitswürfels angegeben. Diese Konstruktion lässt sich für  $n \geq 3$  direkt auf das Polytop  $C^n((1, 0, \dots, 0, 1))$  übertragen. Mit der Beschreibung im Originalraum erhält man somit

$$2n \leq \text{xc}(C^n(v)) \leq 2n + 1$$

für  $n \geq 3$  und  $v \in \{0, 1\}^n$ . Für die Fälle  $n = 1, 2$  existieren schon im Originalraum kompaktere Formulierungen, die keine bzw. drei Ungleichungen benötigen. Aber auch für  $n = 3$  existiert eine erweiterte Formulierung, die mit  $6 = 2n$  Ungleichungen auskommt:

**Beispiel** (Erweiterte Formulierung für  $C^3(\mathbb{O}_3)$ )

Wir betrachten das Polytop

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3, z) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x_1 \leq z \quad (4.3)$$

$$x_2 \leq z \quad (4.4)$$

$$z \leq x_1 + x_2 \quad (4.5)$$

$$x_3 \leq 1 \quad (4.6)$$

$$z \leq 1 \quad (4.7)$$

$$1 \leq x_3 + z \quad \}. \quad (4.8)$$

Für jeden Punkt  $(x_1, x_2, x_3, z) \in Q$  rechnet man leicht nach, dass  $x \in [0, 1]^3$  sowie  $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$  gilt. Damit ist  $(x_1, x_2, x_3) \in C^3(\mathbb{O}_3)$ . Setzt man für einen Punkt

$(x_1, x_2, x_3) \in \{0, 1\}^3 \setminus \{\mathbb{O}_3\}$  die Koordinate  $z = \max\{x_1, x_2\}$ , so ist  $(x_1, x_2, x_3, z) \in Q$ . Somit liefert  $Q$  zusammen mit der Projektion  $(x_1, x_2, x_3, z) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$  eine erweiterte Formulierung der Größe 6 für  $C^3(\mathbb{O}_3)$ .

Nun stellt sich die Frage, ob solche erweiterten Formulierungen der Größe  $2n$  auch für  $n \geq 4$  möglich sind. Computerrechnungen deuten jedoch darauf hin, dass dies nicht möglich ist, vgl. Tabelle 4.1. Die Werte suggerieren zudem, dass Cliques im Rechteckgraphen dieser Polytope nicht mehr als  $2n$  Knoten enthalten können.

Tabelle 4.1: Berechnungen einiger Kenngrößen des Graphen  $\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n))$

$n$	$\chi(\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n)))$	$\omega(\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n)))$	$\iota_0(\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n)))$
3	6	6	$4 + 1/6$
4	9	8	$5 + 1/14$
5	11	10	$6 + 1/30$
6	13	12	$7 + 1/62$

Auch die Schranke  $\iota_0(\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n)))$  reicht nicht aus, um eine Erweiterungskomplexität von  $2n + 1$  zu bestätigen:

**Proposition 4.4.1.** *Für  $n \geq 2$  gilt  $\iota_0(\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n))) \leq n + 1 + \frac{1}{2^n - 2}$ .*

*Beweis.* Die Mengen

$$F_1 = \{x \in C^n(\mathbb{O}_n) \mid x_1 = 1\}$$

$$F_2 = \{x \in C^n(\mathbb{O}_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

bilden Facetten von  $C^n(\mathbb{O}_n)$ . Sicher ist nun

$$R = \{F_1, F_2\} \times \{v \in \{0, 1\}^n, v_1 = 1, v \neq (1, 0, \dots, 0)\}$$

ein Rechteck in  $\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n))$  und enthält  $2 \cdot (2^{n-1} - 1)$  Nichtinzidenzen. Jede der Ecken von  $C^n(\mathbb{O}_n)$  lässt in genau  $n$  Würfelungleichungen Schlupf. Zudem liegen genau  $n$  Ecken auf der Hyperbene  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \iota_0(\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n))) &= \frac{|\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n))|}{\alpha(\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n)))} \leq \frac{|\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n))|}{|R|} \\ &= \frac{(2^n - 1) \cdot n + 2^n - (n + 1)}{2 \cdot (2^{n-1} - 1)} \\ &= \frac{(n + 1)(2^n - 2) + 1}{2^n - 2} \\ &= n + 1 + \frac{1}{2^n - 2}. \end{aligned}$$

□

Die berechneten Werte in Tabelle 4.1 deuten an, dass diese Schranke an  $\iota_0(\mathcal{R}(C^n(\mathbb{O}_n)))$  auch scharf ist. Man beachte, dass die Graphen  $\mathcal{R}(C^n(v))$  von der konkreten Wahl von  $v \in \{0, 1\}^n$  unabhängig sind, da die zugehörigen Polytope paarweise kombinatorisch äquivalent sind.

## 5 Alternaeder

Im Zuge der Untersuchungen des Permutaeders stellt sich eine natürliche Frage: Welche Eigenschaften haben Polytope, die entstehen, wenn man die konvexe Hülle von Permutationsvektoren bildet, die zu Permutationen einer gewissen Untergruppe der symmetrischen Gruppe gehören? Ein interessantes Subpolytop ist dabei das *Alternaeder*, das von der alternierenden Gruppe  $\mathcal{A}_n$  induziert wird. Für dieses Polytop sind äußere Beschreibungen durch lineare Ungleichungen sowie eine vollständige Charakterisierung seines Seitenverbandes bekannt, vgl. [8]. Insbesondere verfügt das Alternaeder, wie das Permutaeder, über exponentiell (in  $n$ ) viele Facetten.

Jedoch sind dem Autor keine Arbeiten bekannt, die Aussagen über die Erweiterungskomplexität des Alternaeders machen oder nichttriviale erweiterte Formulierungen liefern. In diesem Kapitel werden wir auf wesentliche Eigenschaften des Alternaeders eingehen und anschließend erweiterte Formulierungen der Größe  $\mathcal{O}(n^2)$  und  $\mathcal{O}(n \log n)$  angeben, von denen letztere wie im Fall des Permutaeders asymptotisch optimal ist.

### 5.1 Definition und Eigenschaften

Die alternierende Gruppe  $\mathcal{A}_n$  ist die Gruppe der *geraden* Permutationen. Dabei heißt eine Permutation  $\pi \in \mathcal{S}_n$  gerade, wenn die Menge ihrer *Inversionen*  $\{(i, j) \in [n]^2 \mid i < j, \pi(i) > \pi(j)\}$  eine gerade Kardinalität hat. Äquivalent ist eine Permutation genau dann gerade, wenn sie sich als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen schreiben lässt. Eine Permutation heißt *ungerade*, wenn sie nicht gerade ist. Für  $n \in \mathbb{N}$  ist das Alternaeder der Ordnung  $n$  nun definiert als

$$P_{\text{alt}}^n = \text{conv} \{(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)) \mid \pi \in \mathcal{A}_n\} \subseteq P_{\text{perm}}^n \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Offenbar verfügt  $P_{\text{alt}}^n$  über  $|\mathcal{A}_n| = \frac{n!}{2}$  viele Ecken. Auch die Dimension stimmt mit der des Permutaeders im Wesentlichen überein:

**Proposition 5.1.1.** *Für  $n \geq 3$  gilt  $\dim P_{\text{alt}}^n = n - 1$ .*

*Beweis.* Für  $i \in \{2, \dots, n - 1\}$  betrachten wir die geraden Permutationen  $\pi_i := (i, i + 1)(1, 2)$ . Schreiben wir deren Permutationsvektoren  $v^{(\pi_i)}$  zeilenweise auf und subtrahieren von ihnen jeweils den Permutationsvektor der Identität, so erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-2) \times n},$$

deren Rang offenbar  $n - 2$  ist. Damit bilden die  $n - 1$  Vektoren  $\{v^{(\text{id})}, v^{(\pi_2)}, \dots, v^{(\pi_{n-1})}\} \subseteq P_{\text{alt}}^n$  eine affin unabhängige Menge.  $\square$

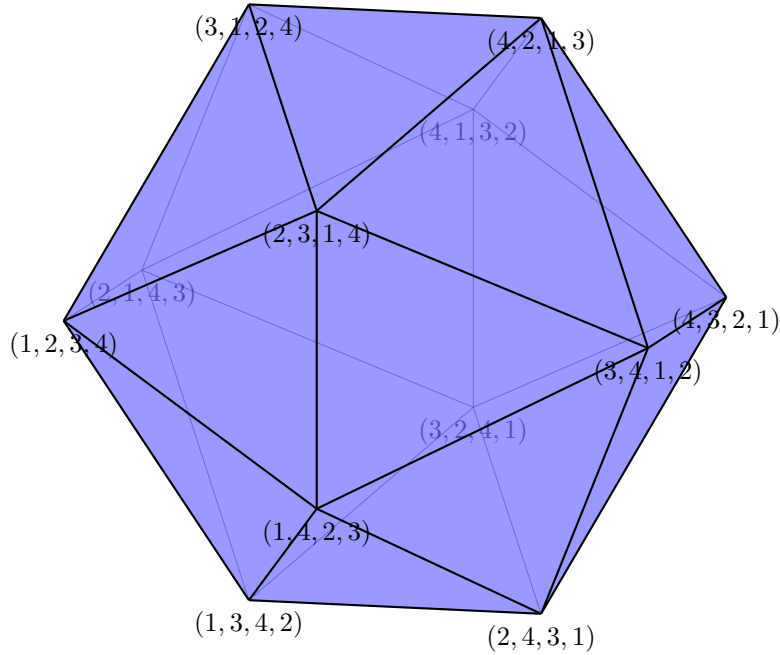


Abbildung 5.1: Bild von  $P_{\text{alt}}^4$  unter der Projektion  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2 + x_4, x_1 + x_2, x_1 + x_4)$

Betrachtet man die Nachbarschaftsrelation des Permutaeders (siehe Lemma 3.1.2), so gehören wegen  $\mathcal{T}_n \subseteq \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$  die Nachbarn von Permutationsvektoren gerader Permutationen zu ungeraden Permutationen und umgekehrt. Damit ist  $\{v^{(\pi)} \mid \pi \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n\}$  eine stabile Menge im Graphen des Permutaeders. Um aus dem Permutaeder das Alternaeder zu erhalten, müssen wir mit Folgerung 3.1.4 tatsächlich nur die Permutationsvektoren „abschneiden“, die zu ungeraden Permutationen gehören. Damit sind wir bereit, eine zu der in [8] vorgestellten alternative äußere Darstellung für  $P_{\text{alt}}^n$  anzugeben:

**Satz 5.1.2.** *Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt*

$$\begin{aligned}
 P_{\text{alt}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid & \sum_{i=1}^n x_i = \frac{n(n+1)}{2} \\
 & \sum_{i \in S} x_i \geq \frac{|S|(|S|+1)}{2} \quad \forall \emptyset \neq S \subset [n] \\
 & \sum_{i=1}^n \sigma(i)x_i \leq \sum_{i=1}^n i^2 - 1 \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n\}. \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Somit lässt sich das Alternaeder durch  $2^n - 2 + \frac{n!}{2}$  Ungleichungen beschreiben. Nach [8, Prop. 4.6] ist obige Darstellung für  $n \geq 5$  auch irredundant. Insbesondere verfügt  $P_{\text{alt}}^n$  ebenfalls über exponentiell viele Facetten.

Wie auch über dem Permutaeder ist das Optimieren einer linearen Zielfunktion über dem Alternaeder trivial. Zunächst bestimmt man deren Optimallösung  $v^{(\pi)}$  über  $P_{\text{perm}}^n$  gemäß Proposition 3.1.1. Ist  $\pi \in \mathcal{A}_n$ , so ist  $v^{(\pi)}$  auch maximal über  $P_{\text{alt}}^n$ . Ist anderenfalls

$\pi \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$ , so wählt man unter den  $n - 1$  Nachbarn von  $v^{(\pi)}$  in  $P_{\text{perm}}^n$  denjenigen aus, der den größten Zielfunktionswert hat. Dieser muss nun auch maximal über  $P_{\text{alt}}^n$  sein.

Die Nachbarschaftsrelation des Graphen des Alternaeders lässt sich wieder leicht charakterisieren: Keine der Ecken des Alternaeders sind im Permutaeder zueinander benachbart. Damit muss eine eindimensionale Seite von  $P_{\text{alt}}^n$  immer in einer Facette enthalten sein, die durch eine Ungleichung in (5.1) induziert wird. Jede dieser Facetten hat aber genau  $n - 1$  Ecken, ist also ein  $(n - 2)$ -Simplex. Insbesondere sind alle Ecken einer solchen Facette benachbart. Damit sind zwei Ecken des Alternaeders genau dann adjazent, wenn sie im Permutaeder zu einer gemeinsamen Ecke adjazent waren. Wir fassen zusammen:

**Lemma 5.1.3.** *Zwei Ecken  $v^{(\pi)}, v^{(\sigma)} \in P_{\text{alt}}^n$  sind genau dann adjazent, wenn  $\pi\sigma^{-1} \in \{\tau_1\tau_2 \mid \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_n, \tau_1\tau_2 \neq \text{id}\} =: \mathcal{T}_n^*$ . Für  $n \geq 2$  ist insbesondere jede Ecke des Alternaeders zu  $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$  weiteren Ecken adjazent.*

*Beweis.* Es bleibt noch zu zeigen, dass  $|\mathcal{T}_n^*| = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$  gilt. Sei  $\tau_1 = (i, i + 1)$  und  $\tau_2 = (j, j + 1)$  mit  $i, j \in [n - 1]$ . Dann kommutieren  $\tau_1$  und  $\tau_2$  genau dann, wenn  $\{i, i + 1\} \cap \{j, j + 1\} = \emptyset$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_n^*| &= |\{(i, i + 1)(j, j + 1) \mid i, j \in [n - 1], i + 1 < j\}| \\ &\quad + |\{(i, i + 1)(i + 1, i + 2) \mid i \in [n - 2]\}| \\ &\quad + |\{(i + 1, i + 2)(i, i + 1) \mid i \in [n - 2]\}| \\ &= \sum_{i=1}^{n-3} (n - 2 - i) + 2(n - 2) \\ &= (n - 3)(n - 2) - \frac{(n - 3)(n - 2)}{2} + 2(n - 2) \\ &= \frac{(n + 1)(n - 2)}{2}. \end{aligned}$$

□

## 5.2 Erweiterte Formulierungen für das Alternaeder

In diesem Kapitel werden wir erweiterte Formulierungen für das Alternaeder angeben, indem wir die in Kapitel 3 angegebenen Formulierungen aufgreifen und entsprechend anpassen. Wie im Falle des Permutaeders erhalten wir mit der Eckenanzahl des Alternaeders die Schranke

$$\text{xc}(P_{\text{alt}}^n) \geq \log(v(P_{\text{alt}}^n)) = \log\left(\frac{n!}{2}\right) = \Theta(n \log n),$$

von der wir sehen werden, dass sie auch in diesem Fall asymptotisch scharf ist. Zudem bereiten wir die hier vorgestellten kompakten erweiterten Formulierungen für eine allgemeine Klasse von Subpolytopen von  $P_{\text{perm}}^n$  vor, auf die wir in Abschnitt 5.4 eingehen.

### 5.2.1 Alternierendes Birkhoff-Polytop

Analog zum Birkhoff-Polytop lässt sich das *alternierende Birkhoff-Polytop* oder kurz  $P_{\text{birk,alt}}^n$  als konvexe Hülle der Permutationsmatrizen betrachten, die zu geraden Permutationen gehören. Mit der gleichen Projektion wie in (3.5) erhält man sicher eine erweiterte

Formulierung für das Alternader. Jedoch benötigt man für die Beschreibung des alternierenden Birkhoff-Polytops im Originalraum nicht mehr nur  $n^2$ , sondern exponentiell viele Ungleichungen [9].

Es wird sogar vermutet [5], dass kein Polynomialzeit-Algorithmus zur Lösung des *Zugehörigkeitsproblems* existiert: „Gegeben ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$ , ist  $x$  in  $P_{\text{birk,alt}}^n$  enthalten?“ Die Wahrheit dieser Aussage würde implizieren, dass man auch das Separationsproblem über dem alternierenden Birkhoff-Polytop nicht in Polynomialzeit lösen kann. Mit [13] existiert dann aber auch kein Algorithmus, der das Optimierungsproblem von linearen Zielfunktionen über  $P_{\text{birk,alt}}^n$  im polynomieller Zeit lösen kann. Mit unserer anfänglichen Betrachtung in Kapitel 2 können wir dann aber auch keine erweiterte Formulierung des alternierenden Birkhoff-Polytops erwarten, deren Kodierungslänge polynomiell in  $n$  ist.

Zwar schließen diese Betrachtungen eine erweiterte Formulierung für das alternierende Birkhoff-Polytop von polynomieller Größe (in der deren Kodierungslänge vernachlässigt wird) nicht aus, jedoch ist dem Autor bis heute keine solche erweiterte Formulierung bekannt.

## 5.2.2 Würfel-Erweiterung

Die Idee hinter der erweiterten Formulierung aus Abschnitt 3.2.2 war die Kodierung der Inversionen einer Permutation in den Einträgen der oberen Dreiecksmatrizen. Das nach Lemma 3.2.1 eindeutige Urbild eines Permutationsvektors unter der Abbildung  $W$  aus (3.6) entspricht genau dieser Konfiguration. Entfernen wir einen solchen Konfigurationsvektor und bilden die konvexe Hülle der restlichen Punkte durch  $W$  ab, so ist der zugehörige Permutationsvektor ebenfalls nicht im Bild enthalten. Dass er aber auch „bestmöglich abgetrennt“ wird, klären wir in folgendem Lemma:

**Lemma 5.2.1.** *Sei  $D \subseteq \Delta^n$  ein Subpolytop von  $\Delta^n$ . Ist  $y^{(\sigma)} \notin D$  für ein  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , so erfüllen alle Punkte  $x \in W(D)$  die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^n \sigma(i) \cdot x_i \leq \sum_{i=1}^n i^2 - 1.$$

*Beweis.* Seien  $x \in W(D)$  sowie  $y \in D$  mit  $W(y) = x$ . Da  $y^{(\sigma)} \notin D$ , gilt mit Satz 4.1.1

$$\sum_{\substack{i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} y_{i,j} + \sum_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} (1 - y_{i,j}) \geq 1$$

oder äquivalent

$$\sum_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} y_{i,j} - \sum_{\substack{i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} y_{i,j} \leq |\{i < j \mid \sigma(i) < \sigma(j)\}| - 1. \quad (5.2)$$

Mit  $x = W(y)$  und der Definition von  $W$  erhalten wir

$$\sum_{j=1}^n \sigma(j) x_j = \sum_{j=1}^n \sigma(j) \left( \sum_{i < j} y_{i,j} + \sum_{i > j} (1 - y_{j,i}) + 1 \right)$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \sigma(j) \sum_{i<j} y_{i,j} - \sum_{j=1}^n \sigma(j) \sum_{i>j} y_{i,j} + \sum_{j=1}^n \sigma(j)(n-j+1) \\
&= \sum_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i)) y_{i,j} + \sum_{j=1}^n \sigma(j)(n-j+1). \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Die erste Summe lässt sich folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i<j} (\sigma(j) - \sigma(i)) y_{i,j} &= \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} (\sigma(j) - \sigma(i)) y_{i,j} + \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} (\sigma(j) - \sigma(i)) y_{i,j} \\
&= \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \underbrace{(\sigma(j) - \sigma(i) - 1)}_{\geq 0} \underbrace{y_{i,j}}_{\leq 1} + \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} \underbrace{(\sigma(j) - \sigma(i) + 1)}_{\leq 0} \underbrace{y_{i,j}}_{\geq 0} \\
&+ \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} y_{i,j} - \sum_{\substack{i>j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} y_{i,j} \\
&\leq \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} (\sigma(j) - \sigma(i) - 1) + \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} y_{i,j} - \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} y_{i,j} \\
&\stackrel{(5.2)}{\leq} \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} (\sigma(j) - \sigma(i) - 1) + |\{i < j \mid \sigma(i) < \sigma(j)\}| - 1 \\
&= \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} (\sigma(j) - \sigma(i)) - 1.
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in (5.3) ein, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \sigma(j) x_j &\leq \sum_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} (\sigma(j) - \sigma(i)) - 1 + \sum_{j=1}^n \sigma(j)(n-j+1) \\
&= \sum_{k=1}^n \sigma(k) (n-k+1 + |\{i < k \mid \sigma(i) < \sigma(k)\}| - |\{i > k \mid \sigma(i) > \sigma(k)\}|) - 1 \\
&= \sum_{k=1}^n \sigma(k) (|\{i \in [n] \mid \sigma(i) < \sigma(k)\}| + 1) - 1 \\
&= \sum_{k=1}^n \sigma(k)^2 - 1 = \sum_{j=1}^n j^2 - 1.
\end{aligned}$$

□

Möchten wir nun die konvexe Hülle einer antistabilen Menge von Permutationsvektoren beschreiben, so reicht die Gültigkeit solcher Ungleichungen nach Folgerung 3.1.4 jedoch schon aus.

**Satz 5.2.2.** *Sei  $U \subseteq \mathcal{S}_n$ , so dass  $\{v^{(\pi)} \mid \pi \in U\}$  antistabil in  $G(P_{perm}^n)$  ist. Sei zudem  $D \subseteq \Delta^n$  ein Subpolytop von  $\Delta^n$ , so dass  $y^{(\pi)} \in D$  genau dann gilt, wenn  $\pi \in U$ . Dann ist*

$$W(D) = \text{conv}\{v^{(\pi)} \mid \pi \in U\}.$$

*Beweis.* Da mit  $\pi \in U$  auch  $y^{(\pi)} \in D$  gilt, haben wir bereits  $\text{conv}\{v^{(\pi)} \mid \pi \in U\} \subseteq W(D)$ . Da  $D \subseteq \Delta^n$ , gilt außerdem  $W(D) \subseteq P_{\text{perm}}^n$ . Mit Lemma 5.2.1 erhalten wir zudem die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\sum_{i=1}^n \sigma(i) \cdot x_i \leq \sum_{i=1}^n i^2 - 1$$

für alle  $x \in W(D)$  und  $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus U$ . Da  $\{v^{(\pi)} \mid \pi \in U\}$  antistabil in  $G(P_{\text{perm}}^n)$  ist, liefert Folgerung 3.1.4 schließlich die Behauptung.  $\square$

Man beachte, dass obige Aussage unabhängig davon ist, ob Ecken von  $\Delta^n$  in  $D$  enthalten sind, die keine Inversionskonfigurationen sind. Aus dieser Beobachtung können wir nun leicht eine erweiterte Formulierung für das Alternaeder folgern. Schließlich können wir nur die Ecken von  $\Delta^n$  zulassen, die eine gerade Anzahl von Einsen enthalten. Wir erhalten:

**Folgerung 5.2.3.**  $P_{\text{alt}}^n = W(\Delta^n \cap P_{\text{even}}^{n \times n})$ .

Beschreibt man  $\Delta^n$  im Originalraum und fügt die erweiterte Formulierung für  $P_{\text{even}}^{n \times n}$  aus Abschnitt 4.2 hinzu, so erhält man schließlich eine erweiterte Formulierung der Größe  $\Theta(n^2)$  für das Alternaeder.

Für dieses Resultat war wichtig, dass die Ecken des Alternaeders eine antistabile Menge im Graphen des Permutaeders bilden. Jedoch sind auch die Ecken des Parity-Polytops eine antistabile Menge in  $G(\Delta^n)$ . Dass dies kein Zufall ist, soll zum Abschluss dieses Kapitels begründet werden:

**Lemma 5.2.4.** *Eine Teilmenge  $V \subseteq \mathcal{V}(P_{\text{perm}}^n)$  von Permutationsvektoren ist genau dann antistabil in  $G(P_{\text{perm}}^n)$ , wenn  $W^{-1}(V) \subseteq \Delta^n \cap \{0, 1\}^{n \times n}$  antistabil in  $G(\Delta^n)$  ist.*

*Beweis.* Seien  $v^{(\pi)}, v^{(\sigma)} \in V$ . Nach Lemma 3.2.1 ist  $W^{-1}(\{v^{(\pi)}, v^{(\sigma)}\}) = \{y^{(\pi)}, y^{(\sigma)}\}$ . Zunächst sei bemerkt, dass Ecken von  $\Delta^n$  genau dann in  $G(\Delta^n)$  benachbart sind, wenn sie es im Einheitswürfel des  $\mathbb{R}^{n \times n}$  sind, sich also in genau einer Koordinate unterscheiden.

Angenommen,  $v^{(\pi)}$  und  $v^{(\sigma)}$  sind benachbart in  $G(P_{\text{perm}}^n)$ . Nach Lemma 3.1.2 ist dann  $\pi = \tau\sigma$  für ein  $\tau = (i, i+1)$  mit  $i \in [n-1]$ . Somit ist  $\pi(k) < \pi(l)$  genau dann, wenn  $\sigma(k) < \sigma(l)$  für alle  $k, l \in [n]$  mit  $\{\pi(k), \pi(l)\} \neq \{i, i+1\}$ . Folglich ist

$$y_{k,l}^{(\pi)} = \begin{cases} y_{k,l}^{(\sigma)}, & \text{falls } \{\pi(k), \pi(l)\} \neq \{i, i+1\} \\ 1 - y_{k,l}^{(\sigma)}, & \text{falls } \{\pi(k), \pi(l)\} = \{i, i+1\}. \end{cases}$$

Damit unterscheiden sich  $y^{(\pi)}$  und  $y^{(\sigma)}$  in genau einer Koordinate und sind somit benachbart in  $G(\Delta^n)$ .

Angenommen  $y^{(\pi)}$  und  $y^{(\sigma)}$  unterscheiden sich in genau einer Koordinate, etwa  $(k, l)$ . Ohne Einschränkung sei  $\sigma(k) < \sigma(l)$ . Dann gilt

$$\{i \in [n] \mid \pi(i) < \pi(j)\} = \begin{cases} \{i \in [n] \mid \sigma(i) < \sigma(j)\}, & \text{falls } j \notin \{k, l\} \\ \{i \in [n] \mid \sigma(i) < \sigma(j)\} \cup \{l\}, & \text{falls } j = k \\ \{i \in [n] \mid \sigma(i) < \sigma(j)\} \setminus \{k\}, & \text{falls } j = l. \end{cases}$$

Wegen  $\pi(j) = |\{i \in [n] \mid \pi(i) < \pi(j)\}| - 1$  und  $|\sigma(j) = \{i \in [n] \mid \sigma(i) < \sigma(j)\}| - 1$  folgt  $\pi = \tau\sigma$  mit  $\tau = (\sigma(k), \sigma(l))$ . Bleibt noch zu zeigen, dass  $\tau \in \mathcal{T}_n$ , also  $\sigma(k) + 1 = \sigma(l)$ . Angenommen dies gilt nicht, dann existiert ein  $r \in [n]$ , so dass  $\sigma(k) < \sigma(r) < \sigma(l)$ . Nach Voraussetzung muss dann aber  $\pi(l) < \pi(k) < \pi(r) < \pi(l)$  gelten, ein Widerspruch.  $\square$

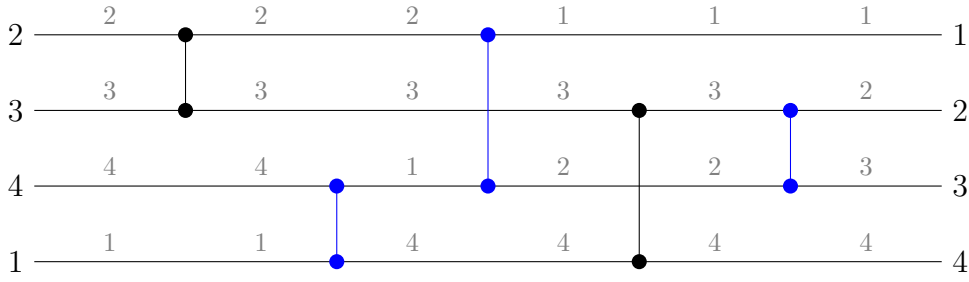


Abbildung 5.2: Sortiernetzwerk aus Abbildung 3.3 für die Eingabe  $(2, 3, 4, 1)$  mit Zwischenwerten in grau und aktiven Vergleichselementen in blau.

### 5.2.3 Sortiernetzwerk-Erweiterung

In diesem Abschnitt wollen wir Goemans' erweiterte Formulierung aus Abschnitt 3.2.3 ebenfalls mit Hilfe des Parity-Polytops so anpassen, dass sie eine erweiterte Formulierung für das Alternader liefert. Dazu benötigen wir den Begriff der *Aktivität* eines Vergleichselementes auf einer Permutation: Ein Vergleichselement  $\tau_{k,l}$  heißt *aktiv* auf  $\pi \in \mathcal{S}_n$ , falls  $\tau_{k,l}(\pi) \neq \pi$ . Wenden wir ein Sortiernetzwerk auf eine gegebene Permutation an, so bewirkt jedes aktive Vergleichselement eine Multiplikation mit einer Transposition, vgl. Abbildung 5.2. Damit sind die geraden Permutationen genau die Permutationen, bei denen eine gerade Anzahl von Vergleichselementen bei Anwendung eines Sortiernetzwerkes aktiv sind. Motiviert durch diese Beobachtung werden wir zusätzliche *Schaltervariablen*  $z = (z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) \in [0, 1]^m$  einführen, die die Aktivität der  $m$  Vergleichselemente kodieren und letztlich durch das Parity-Polytop „kontrolliert“ werden sollen.

Im Folgenden setzen wir voraus, dass ein festes Sortiernetzwerk  $(\tau_{k_1, l_1}, \dots, \tau_{k_m, l_m})$  gegeben ist. Für ein ebenfalls (vorerst) festes Subpolytop  $C \subseteq [0, 1]^m$  von  $[0, 1]^m$  betrachten wir nun das Polytop  $Q(C) \subseteq (\mathbb{R}^n)^{m+1} \times \mathbb{R}^m$ , definiert durch:

$$Q(C) = \{(x^{(0)}, \dots, x^{(m)}, z) \mid \begin{aligned} x_i^{(m)} &= i & i \in [n] \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$z^{(j)} \leq x_{k_j}^{(j-1)} - x_{k_j}^{(j)} \quad j \in [m] \quad (5.5)$$

$$1 - z^{(j)} \leq x_{l_j}^{(j-1)} - x_{k_j}^{(j)} \quad j \in [m] \quad (5.6)$$

$$x_{k_j}^{(j-1)} + x_{l_j}^{(j-1)} = x_{k_j}^{(j)} + x_{l_j}^{(j)} \quad j \in [m] \quad (5.7)$$

$$x_i^{(j-1)} = x_i^{(j-1)} \quad j \in [m], i \in [n] \setminus \{k_j, l_j\} \quad (5.8)$$

$$x^{(j)} \in \mathbb{R}^n \quad j \in \{0\} \cup [m]$$

$$z \in C\}$$

Die Gleichungen (5.4), (5.7) sowie (5.8) entsprechen denen aus Abschnitt 3.2.3. Wegen  $z \in C \subseteq [0, 1]^m$  implizieren (5.5) und (5.6) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x_{k_j}^{(j)} &\leq x_{k_j}^{(j-1)} \\ x_{k_j}^{(j-1)} &\leq x_{l_j}^{(j-1)} \end{aligned}$$

für alle  $j \in [m]$ . Ist  $p$  wieder die Projektion auf die Variablen  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , so gilt damit  $p(Q(C)) \subseteq P_{\text{perm}}^n$ . Wir leiten nun einige weitere Ungleichungen her, die für  $Q(C)$  gelten.

**Lemma 5.2.5.** *Seien  $a \leq b - 1$ . Dann sind die Ungleichungen*

$$a \cdot x_{k_j}^{(j-1)} + b \cdot x_{l_j}^{(j-1)} \leq a \cdot x_{k_j}^{(j)} + b \cdot x_{l_j}^{(j)} - z^{(j)}$$

sowie

$$b \cdot x_{k_j}^{(j-1)} + a \cdot x_{l_j}^{(j-1)} \leq a \cdot x_{k_j}^{(j)} + b \cdot x_{l_j}^{(j)} - (1 - z^{(j)})$$

gültig für  $Q(C)$ .

*Beweis.* Mit  $b - a \geq 1$  lässt sich aus (5.7), (5.5) sowie  $z^{(j)} \geq 0$  die erste Ungleichung folgendermaßen konisch kombinieren:

$$\frac{\begin{array}{l} b \cdot \left( \begin{array}{ccc} x_{k_j}^{(j-1)} & +x_{l_j}^{(j-1)} & = & x_{k_j}^{(j)} & +x_{l_j}^{(j)} \\ (b-a) \cdot \left( \begin{array}{ccc} -x_{k_j}^{(j-1)} & & \leq & -x_{k_j}^{(j)} & -z^{(j)} \\ (b-a-1) \cdot \left( \begin{array}{ccc} & & 0 & \leq & & z^{(j)} \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)}{a \cdot x_{k_j}^{(j-1)} + b \cdot x_{l_j}^{(j-1)} \leq a \cdot x_{k_j}^{(j)} + b \cdot x_{l_j}^{(j)} - z^{(j)}} \end{array}$$

Aus (5.7), (5.6) sowie  $z^{(j)} \leq 1$  kombinieren wir analog die zweite Ungleichung:

$$\frac{\begin{array}{l} b \cdot \left( \begin{array}{ccc} x_{k_j}^{(j-1)} & +x_{l_j}^{(j-1)} & = & x_{k_j}^{(j)} & +x_{l_j}^{(j)} \\ (b-a) \cdot \left( \begin{array}{ccc} & -x_{l_j}^{(j-1)} & \leq & -x_{k_j}^{(j)} & -(1-z^{(j)}) \\ (b-a-1) \cdot \left( \begin{array}{ccc} & & 0 & \leq & & 1-z^{(j)} \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)}{b \cdot x_{k_j}^{(j-1)} + a \cdot x_{l_j}^{(j-1)} \leq a \cdot x_{k_j}^{(j)} + b \cdot x_{l_j}^{(j)} - (1 - z^{(j)})} \end{array}$$

Da alle verwendeten (Un-)Gleichungen gültig für  $Q(C)$  sind, folgt die Behauptung.  $\square$

Für eine Permutation  $\pi \in \mathcal{S}_n$  sei deren *Schalterkonfiguration*  $\kappa(\pi) \in \{0, 1\}^m$  definiert als

$$\kappa(\pi)_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } \tau_{k_j, l_j} \text{ aktiv auf } \pi \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir verwenden nun obiges Lemma, um zu sehen, dass sich die Aktivitäten von Vergleichselementen auf Permutationen in für  $Q(C)$  gültigen Ungleichungen wiederfinden.

**Lemma 5.2.6.** *Sei  $\pi \in \mathcal{S}_n$ . Dann ist die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^n \pi^{(j-1)}(i) \cdot x_i^{(j-1)} \leq \sum_{i=1}^n \pi^{(j)}(i) \cdot x_i^{(j)} - c^{(j)}(z, \pi),$$

wobei

$$c^{(j)}(z, \pi) = \begin{cases} 1 - z^{(j)}, & \text{falls } \kappa(\pi)_j = 1 \\ z^{(j)}, & \text{falls } \kappa(\pi)_j = 0 \end{cases}$$

ist, gültig für  $Q(C)$ .

*Beweis.* Sei  $(x^{(0)}, \dots, x^{(m)}, z) \in Q(C)$ . Ist das Vergleichselement  $\tau_{k_j, l_j}$  aktiv auf  $\pi$ , so muss  $\pi^{(j-1)}(k_j) - 1 \geq \pi^{(j-1)}(l_j)$  gelten. Mit Lemma 5.2.5 erhalten wir

$$\begin{aligned} & \pi^{(j-1)}(k_j) \cdot x_{k_j}^{(j-1)} + \pi^{(j-1)}(l_j) \cdot x_{l_j}^{(j-1)} \\ & \leq \pi^{(j-1)}(l_j) \cdot x_{k_j}^{(j)} + \pi^{(j-1)}(k_j) \cdot x_{l_j}^{(j)} - (1 - z^{(j)}) \\ & = \pi^{(j)}(k_j) \cdot x_{k_j}^{(j)} + \pi^{(j)}(l_j) \cdot x_{l_j}^{(j)} - (1 - z^{(j)}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \pi^{(j-1)}(i) \cdot x_i^{(j-1)} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_j, l_j}}^n \pi^{(j-1)}(i) \cdot x_i^{(j-1)} + \pi^{(j-1)}(k_j) \cdot x_{k_j}^{(j-1)} + \pi^{(j-1)}(l_j) \cdot x_{l_j}^{(j-1)} \\ &\stackrel{(5.8)}{=} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_j, l_j}}^n \pi^{(j)}(i) \cdot x_i^{(j)} + \pi^{(j-1)}(k_j) \cdot x_{k_j}^{(j-1)} + \pi^{(j-1)}(l_j) \cdot x_{l_j}^{(j-1)} \\ &\stackrel{(5.9)}{\leq} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k_j, l_j}}^n \pi^{(j)}(i) \cdot x_i^{(j)} + \pi^{(j)}(k_j) \cdot x_{k_j}^{(j)} + \pi^{(j)}(l_j) \cdot x_{l_j}^{(j)} - (1 - z^{(j)}) \\ &= \sum_{i=1}^n \pi^{(j)}(i) \cdot x_i^{(j)} - (1 - z^{(j)}). \end{aligned}$$

Die Behauptung für den Fall, dass  $\tau_{k_j, l_j}$  nicht aktiv auf  $\pi$  ist, folgt analog.  $\square$

Wie im vorherigen Abschnitt leiten wir nun die Gültigkeit von Ungleichungen der Form (3.4) her, die für die Beschreibung der konvexen Hülle antistabiler Mengen von Permutationsvektoren notwendig ist.

**Lemma 5.2.7.** *Sei  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , so dass  $\kappa(\sigma) \notin C$ . Dann erfüllen alle Punkte  $x \in p(Q(C))$  die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^n \sigma(i) \cdot x_i \leq \sum_{i=1}^n i^2 - 1.$$

*Beweis.* Sei  $x \in p(Q(C))$  sowie  $(x^{(0)}, \dots, x^{(m)}, z) \in Q(C)$ , so dass  $p((x^{(0)}, \dots, x^{(m)}, z)) = x$ . Lemma 5.2.6 liefert die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sigma(i) \cdot x_i &= \sum_{i=1}^n \sigma^{(0)}(i) \cdot x_i^{(0)} \leq \sum_{i=1}^n \sigma^{(1)}(i) \cdot x_i^{(1)} - c^{(1)}(z, \sigma) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sigma^{(2)}(i) \cdot x_i^{(2)} - c^{(1)}(z, \sigma) - c^{(2)}(z, \sigma) \\ &\leq \dots \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sigma^{(m)}(i) \cdot x_i^{(m)} - \sum_{i=1}^n c^{(i)}(z, \sigma) \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma^{(m)}(i) \cdot i - \sum_{i=1}^n c^{(i)}(z, \sigma). \end{aligned}$$

Da  $(\tau_{k_1, l_1}, \dots, \tau_{k_m, l_m})$  ein Sortiernetzwerk ist, gilt  $\sigma^{(m)}(i) = i$  für alle  $i \in [n]$ . Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^n \sigma(i) \cdot x_i \leq \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n c^{(i)}(z, \sigma).$$

Da  $k(\sigma) \notin C$ , gilt zudem nach Satz 4.1.1

$$\sum_{i=1}^n c^{(i)}(z, \sigma) = \sum_{\substack{j=1 \\ k(\sigma)_j=1}}^n (1 - z^{(j)}) + \sum_{\substack{j=1 \\ k(\sigma)_j=0}}^n z^{(j)} \geq 1$$

□

Wir sind nun bereit, eine zu Satz 5.2.2 analoge Aussage herzuleiten.

**Satz 5.2.8.** *Sei  $U \subseteq \mathcal{S}_n$ , so dass  $\{v^{(\pi)} \mid \pi \in U\}$  antistabil in  $G(P_{\text{perm}}^n)$  ist. Sei zudem  $C \subseteq [0, 1]^m$  ein Subpolytop von  $[0, 1]^m$ , so dass  $\kappa(\pi) \in C$  genau dann gilt, wenn  $\pi \in U$ . Dann gilt*

$$p(Q(C)) = \text{conv}\{v^{(\pi)} \mid \pi \in U\}.$$

*Beweis.* Für  $\pi \in U$  setzen wir  $x^{(j)} = \pi^{(j)}$  für  $j \in \{0\} \cup [m]$ , sowie  $z^{(j)} = \kappa(\pi)_j$  für  $j \in [m]$ . Nach Voraussetzung gilt dann  $(x^{(0)}, \dots, x^{(m)}, z) \in Q(C)$  und damit  $\text{conv}\{v^{(\pi)} \mid \pi \in U\} \subseteq p(Q(C))$ . Analog zum Beweis von Satz 5.2.2 folgt die Behauptung nun aus Lemma 5.2.7 und Folgerung 3.1.4. □

Haben wir also ein Sortiernetzwerk der Größe  $m$  sowie eine erweiterte Formulierung der Größe  $K$  für das Polytop  $C$  gegeben, erhalten wir mit der Beschreibung von  $Q(C)$  und  $p$  eine erweiterte Formulierung der Größe  $\mathcal{O}(m + K)$  für  $\text{conv}\{v^{(\pi)} \mid \pi \in U\}$ .

Mit der Beobachtung, dass  $\pi \in \mathcal{A}_n$  genau dann gilt, wenn  $\kappa(\pi) \in P_{\text{even}}^m$  ist und wegen Satz 5.1.2 erhalten wir zudem direkt

**Folgerung 5.2.9.**  $P_{\text{alt}}^n = p(Q(P_{\text{even}}^m))$ .

Da wir  $P_{\text{even}}^m$  mit linear (in  $m$ ) vielen Ungleichungen beschreiben können, erhalten wir somit insbesondere eine erweiterte Formulierung der Größe  $\mathcal{O}(m)$  für das Alternaeders. Die Existenz von Sortiernetzwerken der Größe  $m = \Theta(n \log n)$  liefert uns schließlich eine asymptotisch optimale erweiterte Formulierung für  $P_{\text{alt}}^n$ .

Anders als im Abschnitt zur Würfel-Erweiterung des Alternaeders, zieht die Antistabilität von  $\{v^{(\pi)} \mid \pi \in U\}$  für eine Menge  $U \in \mathcal{S}_n$  nicht die Antistabilität der Eckenmenge des Polytops  $C \subseteq [0, 1]^m$  aus Satz 5.2.8 nach sich: Die Menge  $\{v^{(\pi)} \mid \pi \in \mathcal{S}_3 \setminus \{\text{id}, (1, 3)\}\} \subseteq \mathbb{R}^3$  ist sicher antistabil in  $P_{\text{perm}}^3$ . Wählen wir das Sortiernetzwerk  $(\tau_{1,3}, \tau_{1,2}, \tau_{2,3})$ , so ist aber  $\kappa(\text{id}) = (0, 0, 0)$  und  $\kappa((1, 3)) = (1, 0, 0)$ . Damit sind  $\kappa(\text{id})$  und  $\kappa((1, 3))$  benachbart in  $G([0, 1]^3)$ .

Jedoch können wir, wann immer die Menge der Ecken von  $C$  antistabil in  $G([0, 1]^m)$  ist, davon ausgehen, dass die Menge der zugehörigen Permutationsvektoren antistabil in  $P_{\text{perm}}^n$  ist.

**Lemma 5.2.10.** *Sei  $C$  die konvexe Hülle einer antistabilen Menge aus  $G([0, 1]^m)$ . Dann ist die Menge*

$$\{v^{(\pi)} \mid \pi \in \mathcal{S}_n, \kappa(\pi) \in C\}$$

*antistabil in  $G(P_{\text{perm}}^n)$ .*

*Beweis.* Seien  $\pi, \sigma \in \mathcal{S}_n$ , so dass  $v^{(\pi)}$  und  $v^{(\sigma)}$  in  $G(P_{\text{perm}}^n)$  benachbart sind. Wir müssen zeigen, dass dann auch  $\kappa(\pi)$  und  $\kappa(\sigma)$  in  $G([0, 1]^m)$  benachbart sind.

Es existiert ein  $\tau = (i, i + 1) \in \mathcal{T}_n$ , so dass  $v^{(\pi)} = \tau v^{(\sigma)}$ . Eine Zahl  $k \in [n] \setminus \{i, i + 1\}$  ist sicher genau dann kleiner als  $i$ , wenn sie auch kleiner als  $i + 1$  ist. Damit überlegt man sich für ein Vergleichselement  $\tau_{k_j, l_j}$  leicht, dass

$$\kappa(\pi)_j = \begin{cases} \kappa(\sigma)_j, & \text{falls } (\sigma_{k_j}^{(j-1)}, \sigma_{l_j}^{(j-1)}) \neq (i, i + 1) \\ 1 - \kappa(\sigma)_j, & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Ist nun  $r \in [m]$  der kleinste Index, für den  $\kappa(\pi)_r \neq \kappa(\sigma)_r$  gilt, so ist  $\pi^{(j)} = (i, i + 1)\sigma^{(j)}$  für alle  $j < r$ . Zudem muss  $(\sigma_{k_r}^{(r-1)}, \sigma_{l_r}^{(r-1)}) = (i, i + 1)$  gelten. Nach Anwendung des Vergleichselementes  $\tau_{k_r, l_r}$  ist aber  $\pi^{(r)} = \sigma^{(r)}$  und somit  $\pi^{(j)} = \sigma^{(j)}$  für alle  $j > r$ . Insbesondere erhalten wir

$$\kappa(\pi)_j = \begin{cases} \kappa(\sigma)_j, & \text{falls } j \neq r \\ 1 - \kappa(\sigma)_j, & \text{falls } j = r. \end{cases}$$

Damit unterscheiden sich  $\kappa(\pi)$  und  $\kappa(\sigma)$  in genau einer Koordinate und sind somit auch benachbart in  $G([0, 1]^m)$ .  $\square$

### 5.3 Qualität der unteren Schranken an die Erweiterungskomplexität

Wie in Abschnitt 3.3 soll auch hier kurz auf die Qualität einiger in Abschnitt 2.3.3 vorgestellten unteren Schranken an  $\text{xc}(P_{\text{alt}}^n)$  eingegangen werden. Wir haben in diesem Kapitel gesehen, dass auch  $\text{xc}(P_{\text{alt}}^n) = \Theta(n \log n)$  gilt.

Im Alternaeder ist jede Ecke zu genau  $2(n - 1)$  Facetten inzident. Damit folgern wir mit Satz 2.3.7 wieder:

**Folgerung 5.3.1.** *Für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\omega(\mathcal{R}(P_{\text{alt}}^n)) \leq 2n - 1$ .*

Auch für das Alternaeder liefert die Cliquenzahl des Rechteckgraphen somit keine asymptotisch scharfe Schranke.

Für die Untersuchung der Qualität der Schranke  $\iota_0(\mathcal{R}(P_{\text{alt}}^n))$  identifizieren wir wie in Abschnitt 3.3 die Ecken des Alternaeders mit den zugehörigen Permutationen und die Permutuaederungleichungen (3.2) mit den zugehörigen Mengen  $\emptyset \neq S \subset [n]$ . Die zusätzlichen Facetten des Alternaeders werden von den Ungleichungen (5.1) induziert, weswegen wir sie mit den ungeraden Permutationen identifizieren. Zudem gilt  $\sum_{i=1}^n \sigma(i)v_i^{(\pi)} = \sum_{i=1}^n i^2 - 1$  genau dann, wenn  $\pi\sigma^{-1} \in \mathcal{T}_n$ . Damit setzen wir

$$\begin{aligned} V(\mathcal{R}(P_{\text{alt}}^n)) = \mathcal{N}(P_{\text{alt}}^n) = & \{(S, \pi) \in \mathcal{N}(P_{\text{perm}}^n) \mid \pi \in \mathcal{A}_n\} \\ & \cup \{(\sigma, \pi) \mid \sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n, \pi \in \mathcal{A}_n, \pi\sigma^{-1} \notin \mathcal{T}_n\}. \end{aligned}$$

Für  $n \geq 2$  gilt

$$|\mathcal{N}(P_{\text{alt}}^n)| = (2^n - 2) \frac{n!}{2} - n!(n - 1) + \frac{n!}{2} \cdot \frac{n!}{2} - \frac{n!}{2}(n - 1) = \Theta(2^n \cdot n!).$$

Schränkt man nun im Beweis von Proposition 3.3.2 die Menge  $\mathcal{V}$  auf gerade Permutationen ein, so erhält man analog:

**Folgerung 5.3.2.** *Es gilt  $\iota_0(\mathcal{R}(P_{alt}^n)) \leq \mathcal{O}(n)$ .*

Als Verfeinerung des Ausdrucks  $\iota(\mathcal{R}(P))$  haben wir in Satz 2.3.9 das Maximum des Verhältnisses aus Knotenanzahl  $|U|$  und Stabilitätszahl  $\alpha(G(U))$  für alle Knotenteilmengen  $U \subseteq \mathcal{N}(P)$  erwähnt. Im Falle des Alternaeders ergibt sich ein kanonischer induzierter Subgraph des Rechteckgraphen, indem man nur die Alternaederungleichungen betrachtet. Jedoch stellt man auch in diesem Fall fest, dass das zugehörige Quotient keine asymptotisch scharfe Schranke an die Erweiterungskomplexität des Alternaeders liefert.

**Proposition 5.3.3.** *Sei  $A \subseteq V(\mathcal{R}(P_{alt}^n))$  die Menge der Nichtinzidenzen, die als erste Koordinaten nur die zusätzlichen Facetten des Alternaeders enthalten. Dann gilt  $\frac{|A|}{\alpha(G(A))} \leq \mathcal{O}(n)$ .*

*Beweis.* Wir haben bereits gesehen, dass  $|A| = \frac{n!}{2} \cdot \frac{n!}{2} - \frac{n!}{2}(n-1)$  für  $n \geq 2$  gilt. Für  $n \geq 3$  betrachten wir die Mengen

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 &= \{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n \mid \sigma(1) = 1\} \\ \mathcal{V}_2 &= \{\pi \in \mathcal{A}_n \mid \pi(1) \notin \{1, 2\}\}.\end{aligned}$$

Nun ist  $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \subseteq A$ , denn für  $(\sigma, \pi) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$  gilt  $\pi\sigma^{-1}(1) = \pi(\sigma^{-1}(1)) = \pi(1) \notin \{1, 2\}$ . Damit ist  $\pi\sigma^{-1} \notin \mathcal{T}_n$ . Insbesondere ist  $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$  eine stabile Menge in  $G(A)$ . Wir erhalten

$$\frac{|A|}{\alpha(G(A))} \leq \frac{|A|}{|\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2|} = \mathcal{O}\left(\frac{n! \cdot n!}{(n-1)! \cdot n!}\right) = \mathcal{O}(n).$$

□

## 5.4 Weitere Subpolytope des Permutaeders

In den beiden vorhergehenden Abschnitten haben wir gesehen, dass die geeignete Anpassung der Würfel- und Sortiernetzwerk-Erweiterung erweiterte Formulierungen für eine ganze Klasse von Subpolytopen des Permutaeders liefert. Beide Formulierungen ermöglichen es, einzelne Permutationsvektoren von  $P_{\text{perm}}^n$  durch die Gültigkeit von Ungleichungen des Typs  $\sum_{i=1}^n \sigma(i)x_i \leq \sum_{i=1}^n i^2 - 1$  für gewisse  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  abzutrennen. Für die Korrektheit der Formulierung benötigt man somit, dass die Ecken des zu beschreibenden Subpolytops eine antistabile Menge im Graphen des Permutaeders bilden. In beiden Fällen ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Eckenmenge der Polytope der zulässigen Hilfspunkte  $y \in \Delta^n$  der Würfel-Erweiterung bzw.  $z \in [0, 1]^m$  der Sortiernetzwerk-Erweiterung ebenfalls eine antistabile Menge in  $G(\Delta^n)$  bzw.  $G([0, 1]^m)$  bilden. Diese Beobachtungen bestärken die Frage nach kompakten Beschreibungen für antistabile 0/1-Mengen, schließlich hängt die Größe der angepassten erweiterten Formulierungen maßgeblich von der Größe von erweiterten Formulierungen zur Beschreibung dieser Hilfspolytope ab.

Natürlich lässt sich beispielsweise die konvexe Hülle der Permutationsvektoren, die zu ungeraden Permutationen gehören, genauso kompakt wie das Alternaeder beschreiben.



Man kann sich jedoch die Frage stellen, welche weiteren Subpolytope, deren Eckenmengen ebenfalls zu Untergruppen von  $\mathcal{S}_n$  gehören, man auch auf diese Weise beschreiben kann. Nach Lemma 3.1.2 ist der Graph des Permutaeders  $(n-1)$ -regulär und somit gilt nach Lemma 4.1.2 auch  $\alpha(G(P_{\text{perm}}^n)) \leq \frac{n!}{2}$ . Jede antistabile Menge  $U \subseteq \mathcal{S}_n$  muss damit mindestens Kardinalität  $\frac{n!}{2}$  haben.

**Proposition 5.4.1.** *Sei  $U < \mathcal{S}_n$  eine echte Untergruppe von  $\mathcal{S}_n$  mit  $|U| \geq \frac{n!}{2}$ . Dann ist  $U = \mathcal{A}_n$ .*

*Beweis.* Nach dem Satz von Lagrange ist  $\frac{|\mathcal{S}_n|}{|U|} \in \mathbb{N}$  und wegen  $U \neq \mathcal{S}_n$  muss  $|U| = \frac{n!}{2}$  gelten. Dann hat  $U$  Index 2 in  $\mathcal{S}_n$  und ist somit normal. Damit ist  $\mathcal{S}_n/U$  eine Gruppe der Ordnung 2 und demnach isomorph zur zyklischen Gruppe  $C_2$  mit zwei Elementen. Also existiert ein surjektiver Gruppenhomomorphismus  $f: U \rightarrow C_2$  mit Kern  $U$ .

Ist  $\pi \in \mathcal{S}_n$  ein Dreierzykel, so gilt  $f(\pi)^3 = f(\pi^3) = f(\text{id}) = e$ , wobei  $e$  das neutrale Element in  $C_2$  ist. Dann muss aber auch  $f(\pi) = e$ , also  $\pi \in U$ , gelten. Da  $\mathcal{A}_n$  aber gerade von den Dreierzykeln erzeugt wird, erhalten wir  $\mathcal{A}_n \subseteq U$  und mit  $|\mathcal{A}_n| = |U|$  die Behauptung.  $\square$

Damit lassen sich mit antistabilen Mengen von Permutationsvektoren in  $G(P_{\text{perm}}^n)$ , die zu Untergruppen  $U \leq \mathcal{S}_n$  gehören, nur  $P_{\text{alt}}^n$  und  $P_{\text{perm}}^n$  selbst beschreiben.

## 5.5 Stabilitätszahl des Alternaeders

Für die Auswertung der in dieser Arbeit vorgestellten kombinatorischen, unteren Schranken an die Erweiterungskomplexität ist es unerlässlich, die kombinatorische Struktur und damit auch den Graphen des betrachteten Polytops so gut wie möglich zu verstehen. Die Stabilitätszahl eines Graphen ist dabei eine seiner wesentlichen Eigenschaften, die man in der Regel zu bestimmen versucht.

Im vorherigen Abschnitt haben wir mit der Regularität des Graphen des Permutaeders gesehen, dass die Eckenmenge des Alternaeders eine größtmögliche stabile Menge in  $G(P_{\text{perm}}^n)$  bildet, also  $\alpha(G(P_{\text{perm}}^n)) = \frac{n!}{2}$  für  $n \geq 2$  gilt. Trotz der ebenfalls vorliegenden Regularität als auch der ähnlichen Nachbarschaftsrelation unterscheidet sich die Stabilitätszahl des Graphen des Alternaeders nicht nur um einen konstanten Faktor von dessen Knotenanzahl:

**Lemma 5.5.1.** *Für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  ist  $\alpha(G(P_{\text{alt}}^n)) \leq \frac{n!}{2(n-1)}$ .*

*Beweis.* Wir können die Knoten von  $G(P_{\text{alt}}^n)$  als Permutationen in  $\mathcal{A}_n$  auffassen. Zwei verschiedene Permutationen  $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{A}_n$  sind nun genau dann benachbart, wenn  $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_n$  mit  $\tau_1 \neq \tau_2$  existieren, so dass  $\pi_2 = \tau_2 \tau_1 \pi_1$ . Sei nun  $U \subseteq \mathcal{A}_n$  eine stabile Menge in  $G(P_{\text{alt}}^n)$ . Für  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  setzen wir

$$U_i = (1, 2)(i, i+1)U = \{(1, 2) \circ (i, i+1) \circ \pi \mid \pi \in U\}.$$

Da  $U$  stabil ist, gilt sicher  $U \cap U_i = \emptyset$  für alle  $i \in \{2, \dots, n-1\}$ . Angenommen,  $\pi \in U_i, U_j$  für ein  $\pi \in \mathcal{A}_n$ . Dann existieren  $\pi_1, \pi_2 \in U$ , so dass

$$(1, 2)(i, i+1)\pi_1 = \pi = (1, 2)(j, j+1)\pi_2$$

und somit

$$\pi_2 = \underbrace{(j, j+1)}_{\in \mathcal{T}_n} \underbrace{(i, i+1)}_{\in \mathcal{T}_n} \pi_1.$$

Weil  $U$  stabil ist, muss dann aber  $i = j$ , also  $U_i = U_j$  gelten. Somit haben wir auch  $U_i \cap U_j = \emptyset$  für alle  $i, j \in \{2, \dots, n-1\}$  mit  $i \neq j$ . Letztlich erhalten wir

$$|\mathcal{A}_n| \geq |U| + \sum_{i=2}^{n-1} |U_i| = (n-1) \cdot |U|,$$

$$\text{also } |U| \leq \frac{|\mathcal{A}_n|}{n-1} = \frac{n!}{2(n-1)}. \quad \square$$

Dem Autor ist bisher keine explizite Konstruktion für stabile Mengen in  $G(P_{\text{alt}}^n)$  bekannt, deren Kardinalität in der Größenordnung  $\Omega((n-k)!)$  für ein festes  $k \in \mathbb{N}$  liegen. Die reine Existenz solcher Mengen lässt sich jedoch bereits für  $k = 2$  positiv beantworten, wie wir zum Abschluss dieses Kapitels aus folgender Beobachtung einfach folgern:

**Lemma 5.5.2.** *Sei  $G = (V, E)$  ein  $d$ -regulärer ungerichteter Graph für  $d \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\frac{|V|-1}{d+1} < \alpha(G)$ .*

*Beweis.* Sei  $U \subseteq V$  eine stabile Menge in  $G$ . Angenommen, es gilt  $|U| \leq \frac{|V|-1}{d+1}$ . Sei  $N(U) = \{v \in V \setminus U \mid \{u, v\} \in E \text{ für ein } u \in U\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} |V \setminus (U \cup N(U))| &= |V| - |U| - |N(U)| \\ &\geq |V| - |U| - d \cdot |U| \\ &= |V| - (d+1)|U| \\ &\geq |V| - (d+1) \cdot \frac{|V|-1}{d+1} = 1 \end{aligned}$$

und somit  $V \setminus (U \cup N(U)) \neq \emptyset$ . Demnach gibt es ein  $v \in V \setminus U$ , so dass  $U \cup \{v\}$  auch eine stabile Menge in  $G$  ist.  $\square$

Mit Lemma 5.1.3 erhalten schließlich:

**Folgerung 5.5.3.** *Für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  gilt  $\alpha(G(P_{\text{alt}}^n)) > \frac{n!-2}{(n+1)(n-2)+2}$ .*

## 6 Ausblick

Zum Abschluss dieser Arbeit sollen Fragen aufgeführt werden, die in dieser Arbeit offen geblieben sind oder sich aus den Beobachtungen ergeben haben.

Während wir für das Alternaeder eine asymptotisch optimale erweiterte Formulierung angeben konnten, die sich auf weitere Subpolytope des Permutaeders übertragen lässt, deren Eckenmengen antistabil in  $G(P_{\text{perm}}^n)$  sind, bleibt die Frage nach kompakten erweiterten Formulierungen für weitere Subpolytope des Permutaeders offen. Insbesondere deckt die angegebene erweiterte Formulierung keine der Subpolytope ab, die zu anderen echten Untergruppen der symmetrischen Gruppe korrespondieren.

Angeschlossen an diese Beobachtungen haben wir die Stabilitätszahl des Graphen des Alternaeders innerhalb der Größenordnungen von  $\Omega((n-2)!)$  und  $\mathcal{O}((n-1)!)$  einordnen können. Auch wenn die Frage nach einem exakten algebraischen Ausdruck für  $\alpha(G(P_{\text{alt}}^n))$  nur wenig Bedeutung für die weiteren Fragestellungen zu haben scheint, stellt sie ein für sich interessantes, kombinatorisches Problem dar.

Die angegebenen erweiterten Formulierungen für die genannten Subpolytope des Permutaeders motivierten die Untersuchung antistabiler 0/1-Polytope. Jedoch stellen sie ebenfalls eine für sich selbst interessante Klasse von Polytopen dar: Eine bis heute offene Frage ist, ob es Klassen von 0/1-Polytopen gibt, über denen das Optimierungsproblem einer linearen Zielfunktion in polynomieller (in  $n$ ) Zeit gelöst werden kann, deren Erweiterungskomplexität sich aber nicht durch ein Polynom in  $n$  beschränken lässt. Das Optimierungsproblem einer linearen Zielfunktion über einem antistabilen 0/1-Polytop  $P$  ist genau dann polynomiell lösbar, wenn auch das Zugehörigkeitsproblem, zu entscheiden, ob  $P$  einen gegebenen 0/1-Vektor enthält, polynomiell lösbar ist. Gegeben eine lineare Zielfunktion, kann man zunächst den 0/1-Vektor berechnen, der sie über dem ganzen Einheitswürfel maximiert. Ist dieser im Polytop enthalten, so ist man fertig. Andererseits wählt man den der  $n$  Nachbarn aus, der maximalen Zielfunktionswert hat. In Kapitel 4 haben wir zudem gesehen, dass es tatsächlich Klassen von antistabilen 0/1-Polytopen gibt, deren Erweiterungskomplexität nicht durch ein Polynom in der Dimension beschränkt werden kann.

Das Zugehörigkeitsproblem ist für alle in Abschnitt 4.4 angegebenen Beispiele trivial lösbar: Für charakteristische Vektoren von Kantenteilmengen kann algorithmisch leicht entschieden werden, ob sie zu einem perfekten Matching oder Hamilton-Kreis gehören. Bezüglich den Polytopen  $P_{a,\beta}$  lässt sich natürlich leicht berechnen, ob gegebene Punkte  $x \in \{0,1\}^n$  die Gleichung  $\langle a, x \rangle = \beta$  erfüllen. Damit bilden diese Beispiele interessante Kandidaten für die Beantwortung der oben genannten Fragestellung, wenngleich wir auch nicht nachweisen konnten, dass letztere Klasse tatsächlich Polytope beinhaltet, deren Erweiterungskomplexität schneller als polynomiell wächst.

Jedoch haben wir in Kapitel 4 auch gesehen, dass die bisher bekannten Schranken nur ausreichen, um ein lineares Wachstum der Erweiterungskomplexität antistabiler 0/1-Polytope zu begründen. Dies motiviert die Frage nach anderen Schranken an  $xc(P)$ , die eventuell nicht allein auf der kombinatorischen Struktur von  $P$  beruhen.

Abschließend steht zudem die exakte Bestimmung der Erweiterungskomplexität des Polytops  $C^n(\mathbb{O}_n)$  aus, für das die Berechnungen für  $n \geq 4$  bisher andeuten, als ob es tatsächlich durch nicht weniger als  $2n + 1$  Ungleichungen beschrieben werden kann.

---

# Literaturverzeichnis

- [1] Ajtai, M., Komlós, J. und Szemerédi, E.: *Sorting in  $c \log n$  parallel steps*. *Combinatorica*, 3:1–19, 1983.
- [2] Bertsimas, D. und Weismantel, R.: *Optimization over integers*. Dynamic Ideas, Belmont, 2005.
- [3] Billera, L. J. und Sarangarajan, A.: *The combinatorics of permutation polytopes*. In: *Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (New Brunswick, 1994)*, Band 24 der Reihe *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, Seiten 1–23. American Mathematical Society, 1996.
- [4] Bixby, R. E. und Rothberg, E.: *Progress in computational mixed integer programming — A look back from the other side of the tipping point*. *Annals of Operations Research*, 149:37–41, 2007.
- [5] Brualdi, R. A. und Liu, B.: *The polytope of even doubly stochastic matrices*. *J. Comb. Theory Series A*, 57:243–253, 1991.
- [6] Carr, R. D. und Konjevod, G.: *Polyhedral Combinatorics*. In: Greenberg, H. (Herausgeber): *Tutorials on emerging methodologies and applications in Operations Research*, Kapitel 2, Seiten (2–1)–(2–48). Springer, 2004.
- [7] Cohen, J. E. und Rothblum, U. G.: *Nonnegative Ranks, Decompositions and Factorizations of Nonnegative Matrices*. *Linear Algebra and its Applications*, 190:149–168, 1993.
- [8] Cruickshank, J. und Kelly, S.: *Rearrangement Inequalities and the Alternahedron*. *Discrete & Computational Geometry*, 35(2):241–254, 2006.
- [9] Cunningham, W. H. und Wang, Y.: *On the even permutation polytope*. *Linear Algebra and its Applications*, 389:269–281, 2004.
- [10] Edmonds, J.: *Maximum Matching and a Polyhedron with (0, 1) Vertices*. In: *Journal of Research National Bureau of Standards*, Seite 68, 1965.
- [11] Fiorini, S., Kaibel, V., Pashkovich, K. und Theis, D. O.: *Combinatorial Bounds on Nonnegative Rank and Extended Formulations*. *Computing Research Repository*, abs/1111.0444, 2011.
- [12] Goemans, M. X.: *Smallest Compact Formulation for the Permutahedron*. <http://math.mit.edu/~goemans/PAPERS/permutahedron.pdf>, 2009.
- [13] Grötschel, M., Lovász, L. und Schrijver, A.: *The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization*. *Combinatorica*, 1:169–198, 1981.

- 
- [14] Kaibel, V.: *Extended Formulations in Combinatorial Optimization*. *Optima*, 85:2–6, 2011.
- [15] Rado, R.: *An inequality*. *Journal of the London Mathematical Society*, 27:1–6, 1952.
- [16] Rothvoß, T.: *Some 0/1 polytopes need exponential size extended formulations*. *Computing Research Repository*, abs/1105.0036, 2011.
- [17] Schrijver, A.: *Theory of Linear and Integer Programming*. *Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics*. John Wiley & Sons, Chichester, 1986.
- [18] Schrijver, A.: *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*, Band A, Kapitel 13. Springer, Berlin, 2003.
- [19] Vavasis, S. A.: *On the Complexity of Nonnegative Matrix Factorization*. *SIAM Journal on Optimization*, 20(3), 2009.
- [20] Wolsey, L. A.: *Using Extended Formulations in Practice*. *Optima*, 85:7–8, 2011.
- [21] Yannakakis, M.: *Expressing combinatorial optimization problems by linear programs*. *Journal of Computer and System Sciences*, 43:441–466, 1991.
- [22] Ziegler, G. M.: *Lectures on polytopes*. *Graduate texts in Mathematics*. Springer, Berlin, 1995.